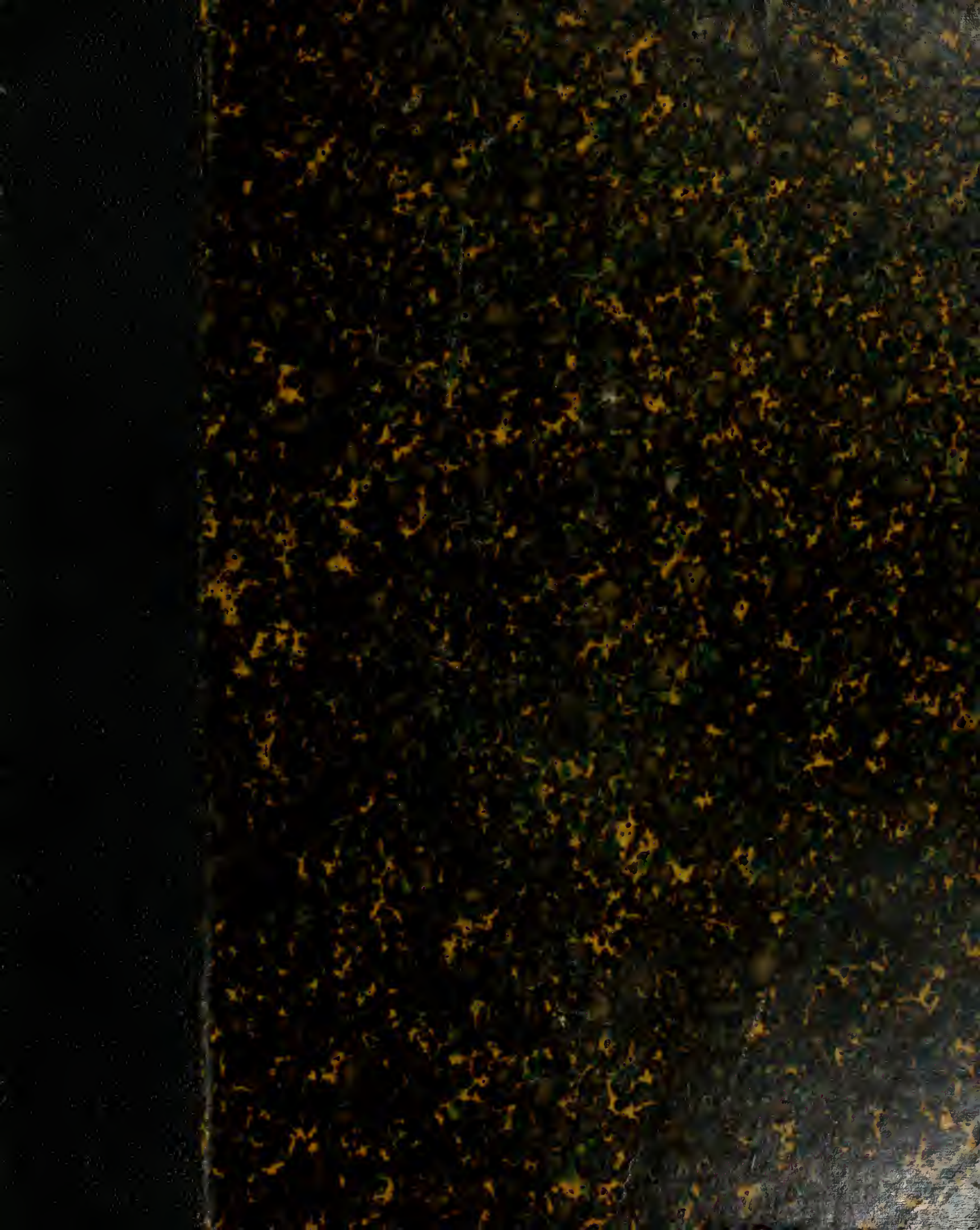
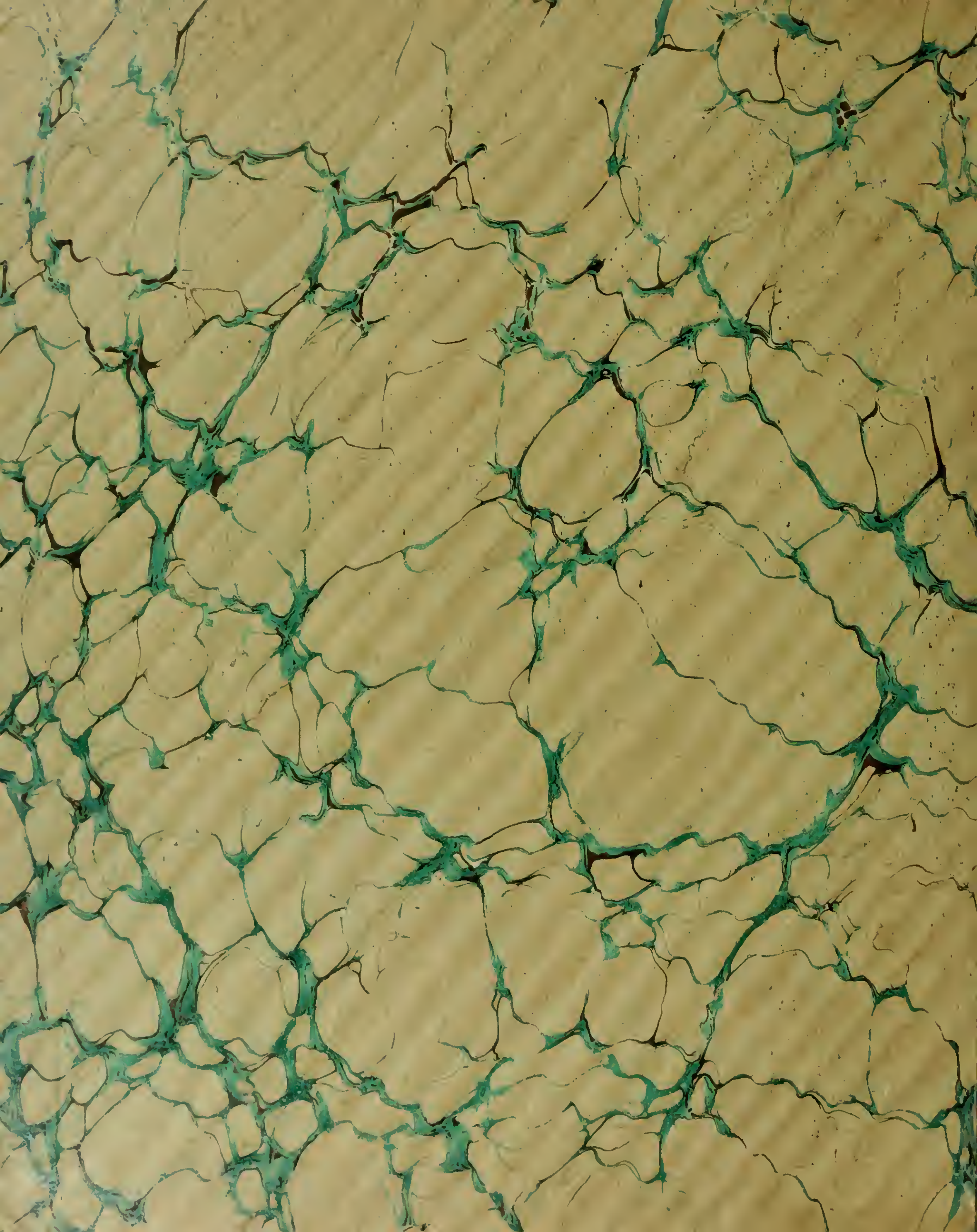
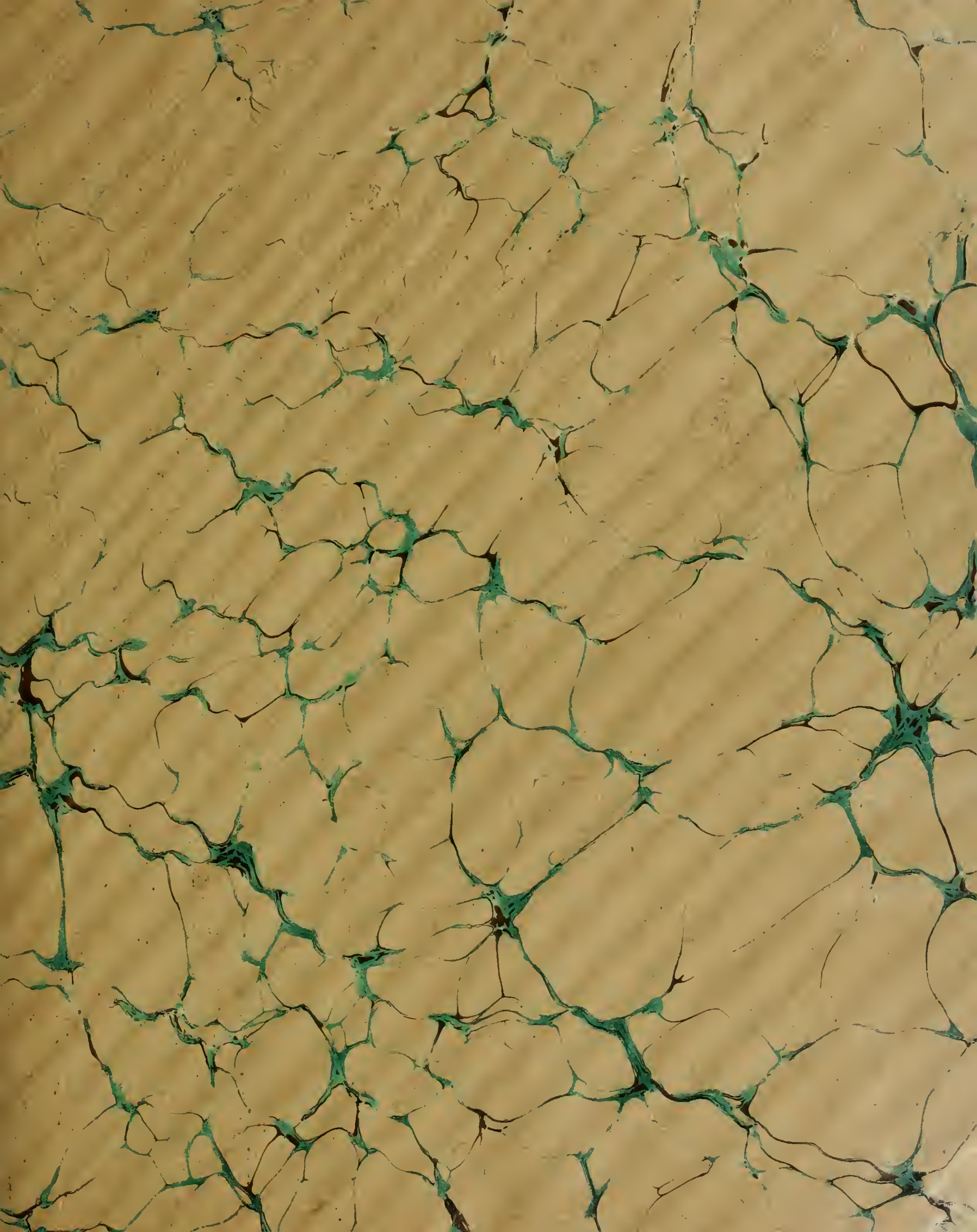






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME X. — ANNÉE 1865.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1865

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME X.

Pages.

ERRATA.

Page 54, ligne 21, *au lieu de* par, *lisez* s'exprime donc par.

Page 234, ligne 17, *après* $\mu = 1$, *ajoutez :* Le cas de $\mu = 2$ est résolu par l'identité

$$23 = 4^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 7 \cdot 1^2.$$

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Nous avons démontré dans ce journal (cahier de janvier 1859, p. 47) que tout entier n différent de 3 peut être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Mais personne, que je sache, n'a trouvé jusqu'ici une expression simple et générale du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

des représentations dont n est susceptible sous la forme citée, c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

dans laquelle x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Je veux traiter aujourd'hui cette question délicate, mais pour le cas seulement d'un entier n pair. Le cas de n impair offre, en

effet, des difficultés spéciales que je n'ai pas encore pu vaincre complétement. On verra néanmoins qu'il suffirait d'avoir réussi pour les entiers premiers à 5. De là on passerait sans peine aux multiples de 5.

2. Mettons en évidence les facteurs 2 et 5 que n peut contenir et pour cela écrivons

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant un entier impair, premier à 5. Supposons

$$\alpha > 0,$$

afin que n soit pair, mais faisons successivement $\beta = 0$, puis $\beta > 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier $2^\alpha m$ pair et premier à 5, le résultat que j'obtiens est d'une extrême simplicité. La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right)$$

s'exprime en effet par le quadruple de la somme des diviseurs de m. En d'autres termes, on a, d'après une notation dont j'ai fait bien souvent usage dans ce journal,

$$(1) \qquad \mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right) = 4\zeta_1(m).$$

Dans le second cas, le facteur 4 est remplacé par un facteur dépendant de β, savoir

$$2\left(5^{\beta+1} - 3\right).$$

Ainsi on a

$$(2) \quad \mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right) = 2\left(5^{\beta+1} - 3\right)\zeta_1(m).$$

La formule (2) comprend la formule (1) à laquelle elle se réduit quand on fait $\beta = 0$. L'exposant α n'y joue aucun rôle ; mais il ne faut pas oublier que l'on suppose cet exposant > 0.

3. Appliquons les formules (1) et (2) à quelques exemples ; et d'a-

bord prenons $\alpha = 1$ avec $m = 1$ dans la formule (1). Elle nous donnera

$$N(2 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2$$

qui fournit pour l'entier 2 quatre représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Avec $\alpha = 1$, soit $m = 3$ dans cette même formule (1). Nous trouverons

$$N(6 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 16,$$

ce qui est exact en vertu des identités

$$6 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,$$
$$6 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,$$
$$6 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2,$$
$$6 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2,$$

de chacune desquelles on déduit quatre représentations de l'entier 6.

Soit encore $\alpha = 2$, avec $m = 1$. La formule (1) nous donnera cette fois

$$N(4 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4,$$

et la vérification résultera des deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 5.0^2 + 5.0^2.$$

Passant à la formule (2), prenons maintenant $\beta = 1$, avec $\alpha = 1$ et $m = 1$. Nous obtiendrons

$$N(10 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 44.$$

Les identités à employer sont ici :

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,$$
$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2,$$
$$10 = 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2.$$

On en tire successivement quatre, quatre, huit, huit, huit, huit, et enfin quatre représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Or

$$4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 4 = 44;$$

la vérification cherchée a donc lieu. Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

4. On ne peut pas faire $\alpha = 0$ dans les formules (1) et (2); et je n'ai trouvé aucune formule véritablement simple pour calculer

$$\mathrm{N}\,(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Mais je puis montrer du moins que de la valeur de

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

on conclut sans peine celle de

$$\mathrm{N}\,(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Mettons en évidence la seule variable de la question, savoir β, en écrivant

$$\mathrm{N}\,(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \mathrm{F}(\beta),$$

de manière que

$$F(0) = N(m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

On donne donc

$$F(0)$$

et on demande

$$F(\beta).$$

Or je trouve qu'il existe entre deux fonctions consécutives

$$F(\beta),\ F(\beta+1)$$

la relation suivante

$$F(\beta+1) + F(\beta) = 4(5^{\beta+1} - 1)\zeta_1(m).$$

C'est une équation aux différences finies très-facile à intégrer. On en tire

$$(3)\qquad F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta\left[F(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right],$$

et la question proposée est résolue.

5. Pour $m = 1$, on a

$$F(0) = 4;$$

c'est ce qui résulte des deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2.$$

La valeur correspondante de

$$F(\beta)$$

sera donc

$$F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes

$$N(5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

Par exemple, on a

$$\mathrm{N}(5 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 12,$$

résultat confirmé par les identités

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$5 = 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,$$
$$5 = 0^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2.$$

L'entier 3 est le seul qui ne puisse pas être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Pour $m = 3$, on a donc

$$\mathrm{F}(0) = 0,$$

d'où

$$\mathrm{F}(\beta) = \frac{8}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autre termes

$$\mathrm{N}(5^\beta.3 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{8}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

Par exemple, on doit avoir

$$\mathrm{N}(15 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 64;$$

et on vérifiera sans peine qu'il en est effectivement ainsi.

Pour $m = 7$, les identités

$$7 = (\pm 1) + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2$$

donnent

$$\mathrm{F}(0) = 16,$$

par conséquent

$$\mathrm{F}(\beta) = \frac{16}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes, on a

$$N(7.5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{16}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

Enfin, pour $m = 9$, on trouve

$$F(0) = 20,$$

et par suite

$$F(\beta) = \frac{26}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta,$$

c'est-à-dire

$$N(9.5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{26}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

Mais en voilà assez sur ces détails.

6. Le rapport si simple que les formules

$$(1) \qquad N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4\zeta_1(m)$$

et

$$(2) \qquad N(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 2(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m)$$

établissent entre

$$N(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

et

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2),$$

dans le cas de $\alpha > 0$, n'existe plus quand $\alpha = 0$. La formule

$$(3) \qquad F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta\left[F(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right]$$

a lieu alors; mais elle conduit à un rapport beaucoup plus compliqué et qui d'ailleurs n'est plus indépendant de m. La formule (3) n'en est pas moins digne de remarque, et nos lecteurs ne me reprocheront pas, j'espère, de la leur avoir communiquée, bien que la valeur de $F(0)$ reste à trouver pour chaque valeur de m.

Au reste, on verra dans l'article suivant comment la fonction

$$F(\beta)$$

est liée à une autre fonction

$$f(\beta),$$

de nature semblable, mais rapportée à la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

Ce que nous dirons à ce sujet ne sera pas sans intérêt.

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, est liée intimement à la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

qui a été l'objet de l'article précédent. Le rapprochement deviendra plus sensible si l'on remplace la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

par la forme équivalente

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 5t^2$$

et si l'on observe que les deux formes binaires

$$x^2 + 5y^2,\ 2x^2 + 2xy + 3y^2,$$

distinctes entre elles, il est vrai, appartiennent néanmoins au même déterminant -5. Aussi la solution de la question qui consiste à chercher une expression simple du nombre

$$\mathrm{N}\,(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

est entièrement subordonnée à celle de la question analogue pour la

forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

C'est ce que nous allons expliquer en détail. Nous ferons, comme dans l'article précédent,

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant impair et premier à 5.

2. Soit d'abord $\alpha > 0$, de façon qu'il s'agisse d'un entier pair.

Tout dépend alors d'une proposition bien facile à établir, à savoir que la valeur de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2\right)$$

est égale à celle de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right).$$

Or on a vu que cette dernière valeur s'exprime par

$$2\left(5^{\beta+1} - 3\right)\zeta_1(m).$$

Telle est donc aussi l'expression de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2\right).$$

Je n'ai pas besoin de rappeler que

$$\zeta_1(m)$$

désigne la somme des diviseurs de m.

Le cas d'un nombre pair est donc résolu par la formule

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2\right) = 2\left(5^{\beta+1} - 3\right)\zeta_1(m)$$

qui ne laisse rien à désirer. L'exposant α est supposé > 0, mais l'exposant β est indifféremment nul ou positif. Quand on a $\beta = 0$, la formule

devient

$$N(2^{\alpha}m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 4\zeta_1(m).$$

Par exemple, on a

$$N(2 = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 4;$$

et en effet l'entier 2 est susceptible de quatre représentations sous la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

On les obtient en prenant $y = 0$ et $t = 0$, avec $x = 0$, $z = 1$, ou bien avec $x = 0$, $z = -1$, ou encore avec $x = 1$, $z = 0$, ou enfin avec $x = -1$, $z = 0$. Mais je ne veux pas insister sur ces vérifications numériques.

5. Soit maintenant $\alpha = 0$, en sorte qu'il s'agisse d'un entier impair

$$5^{\beta}m.$$

Posons généralement

$$N(5^{\beta}m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = f(\beta),$$

partant

$$N(m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = f(0).$$

Nous aurons, entre

$$f(\beta)$$

et

$$f(0),$$

précisément la même relation que nous avons trouvée, entre

$$F(\beta)$$

et

$$F(0),$$

dans l'article précédent, où nous supposions

$$F(\beta) = N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Ainsi on a

$$f(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta\left[f(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right],$$

ce qui permet d'exprimer simplement la valeur de

$$N(5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

quand on connaît celle de

$$N(m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2).$$

Il est clair, par exemple, que

$$N(1 = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 0.$$

Ayant donc $f(0) = 0$ pour $m = 1$, on en conclut la valeur correspondante de $f(\beta)$, qui est

$$\frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{4}{3}(-1)^\beta;$$

telle est donc la valeur de

$$N(5^\beta = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2),$$

quel que soit l'exposant β.

Mais je trouve en outre une relation curieuse entre $f(0)$ et $F(0)$, ou plutôt entre $f(\beta)$ et $F(\beta)$. Il est aisé en effet de prouver que l'on a

$$F(0) + 2f(0) = 4\zeta_1(m)$$

et généralement

$$F(\beta) + 2f(\beta) = 2(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m);$$

c'est-à-dire qu'en ajoutant au nombre des représentations de l'entier

impair $5^{\beta}m$, par la forme

$$x^2+y^2+5z^2+5t^2,$$

le double du nombre des représentations de ce même entier, par la forme

$$2x^2+2xy+3y^2+2z^2+2zt+3t^2,$$

on obtient toujours pour total

$$2(5^{\beta+1}-3)\zeta_1(m).$$

Les deux formes citées se prêtent en quelque sorte un appui mutuel pour aboutir à un résultat simple.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La question de trouver une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2)$$

des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions que l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

comporte en y prenant pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, offre des difficultés qu'il m'a été jusqu'ici impossible de lever complétement d'une manière satisfaisante. Mais les difficultés dont il s'agit ne portent que sur le cas d'un entier n de la forme

$$6l + 1.$$

Les solutions que j'ai obtenues pour tous les autres cas ne laissent, je crois, rien à désirer. C'est à les exposer que je veux consacrer le présent article. Pour abréger, je représenterai par

$$A(n)$$

le nombre demandé

$$N(n = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2).$$

Qu'il soit donc bien entendu que dans ce qui va suivre

$$A(n)$$

désigne le nombre des représentations de n par la forme toujours sous-entendue

$$x^2+y^2+9z^2+9t^2.$$

2. Pour distinguer clairement les divers cas qui peuvent se présenter, je mettrai en évidence les facteurs 2 et 3, quand ils existent, et j'écrirai

$$n=2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair premier à 3 et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro.

Le premier cas sera celui d'un entier pair et multiple de 3. La valeur de

$$\mathrm{A}(2^\alpha 3^\beta m)$$

s'obtiendra alors en multipliant la somme

$$\zeta_1(m)$$

des diviseurs de m par le facteur

$$12(3^{\beta-1}-1)\zeta_1(m)$$

qui dépend de β.

En d'autres termes, sous la double condition de

$$\alpha>0,\quad \beta>0,$$

l'on a

$$\mathrm{A}(2^\alpha 3^\beta m)=12(3^{\beta-1}-1)\zeta_1(m). \tag{1}$$

Quand on a $\beta=1$, cette formule donne

$$\mathrm{A}(3.2^\alpha m)=0,$$

résultat exact, car l'équation

$$3.2^\alpha m=x^2+y^2+9z^2+9t^2$$

exige que 3 divise $x^2 + y^2$, partant x et y, en sorte que le second membre serait divisible par 9, tandis que le premier ne l'est pas.

Quand β est > 1, l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

est ramenée par le raisonnement précédent à celle-ci

$$2^\alpha 3^{\beta-2} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Aussi l'équation (1) n'est-elle qu'une conséquence immédiate du théoreme de Jacobi concernant le nombre des représentations d'un entier pair par une somme de quatre carrés.

De même s'il s'agit d'un entier impair, multiple de 3, en sorte que β soit > 0, on aura

$$A(3^\beta m) = 4(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m). \tag{2}$$

Cette fois encore le second membre est nul pour $\beta = 1$.

3. Le cas d'un entier

$$2^\alpha m.$$

pair et premier à 3, sans être bien difficile à traiter, demande pourtant un peu plus d'artifice que ceux où il s'agit d'un multiple de 3 ; le résultat est, du reste, tout aussi simple.

L'exposant α n'étant pas nul, la valeur de

$$A(2^\alpha m)$$

s'exprime en effet par le quadruple de la somme des diviseurs de m ; c'est-à-dire que, pour $\alpha > 0$, l'on a

$$A(2^\alpha m) = 4\zeta_1(m). \tag{3}$$

Par exemple, on doit avoir

$$A(2) = 4,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 9.0^2 + 9.0^2$$

qui donne quatre représentations de l'entier 2 sous la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2.$$

On aura également

$$A(4) = 4;$$

la vérification se tire des deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 9.0^2 + 9.0^2$$

et

$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 9.0^2 + 9.0^2.$$

Il faut aussi que

$$A(10) = 24.$$

Or on a les identités

$$\begin{aligned}
10 &= (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 9.0^2 + 9.0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 9.0^2 + 9.0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 9(\pm 1)^2 + 9.0^2,\\
10 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9.0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 9.0^2 + 9(\pm 1)^2,\\
10 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 9.0^2 + 9(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

qui sont au nombre de six et fournissent chacune quatre représentations. Comme

$$4.6 = 24,$$

la vérification cherchée a lieu.

Enfin on doit avoir

$$A(14) = 32;$$

or cela résulte des identités

$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9.0^2,$$
$$14 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9.0^2,$$
$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 9.0^2 + 9(\pm 1)^2,$$
$$14 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 9.0^2 + 9(\pm 1)^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exemples.

4. Reste le cas d'un entier m, impair et premier à 3. Il se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 6l + 1,$$

ou

$$m = 6l - 1.$$

J'ai déjà dit que je n'ai rien obtenu d'entièrement satisfaisant au sujet de

$$A(6l + 1);$$

mais j'ai réussi pour

$$A(6l - 1)$$

dont la valeur est fournie par les quatre tiers de la somme des diviseurs de $6l - 1$, en sorte que

$$(4) \qquad A(6l - 1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l - 1).$$

Vérifions cette formule sur quelques exemples. Et d'abord soit $l = 1$, d'où

$$6l - 1 = 5.$$

Elle donnera

$$A(5) = 8,$$

résultat confirmé par les identités

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 9.0^2 + 9.0^2$$

et

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 9 . 0^2 + 9 . 0^2,$$

dont chacune fournit quatre représentations de l'entier 5.

Soit ensuite $l = 2$, d'où

$$6l - 1 = 11.$$

La formule (4) donne

$$A(11) = 16,$$

ce qui s'accorde avec les identités

$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9 . 0^2$$

et

$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 9 . 0^2 + 9(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit huit représentations.

Soit enfin $l = 3$, d'où

$$6l - 1 = 17.$$

La formule (4) donnera

$$A(17) = 24.$$

Les identités à employer cette fois sont au nombre de quatre, savoir :

$$17 = (\pm 1)^2 + (\pm 4)^2 + 9 . 0^2 + 9 . 0^2,$$
$$17 = (\pm 4)^2 + (\pm 1)^2 + 9 . 0^2 + 9 . 0^2,$$
$$17 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 9(\pm 1)^2 + 9 . 0^2,$$
$$17 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 9 . 0^2 + 9(\pm 1)^2.$$

Elles fournissent respectivement, pour l'entier 17, quatre, quatre, huit et encore huit représentations. Or

$$4 + 4 + 8 + 8 = 24.$$

La formule (4) reste donc exacte.

On verra, dans l'article suivant, qu'en désignant par

$$B(n)$$

le nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2,$$

on a

$$A(6l+1) + 2B(6l+1) = 4\zeta_1(6l+1);$$

mais n'ayant pas la valeur de

$$B(6l+1),$$

on ne peut pas en conclure celle de

$$A(6l+1).$$

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, est liée intimement à la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

que nous avons considérée dans l'article précédent. Pour le mieux comprendre, on remplacera la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2,$$

par la forme équivalente

$$x^2 + 9y^2 + z^2 + 9t^2,$$

et l'on remarquera que les deux formes binaires

$$x^2 + 9y^2, \quad 2x^2 + 2xy + 5y^2,$$

distinctes il est vrai, appartiennent néanmoins au même déterminant -9. On ne s'étonnera donc pas que le nombre $B(n)$ des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$$

se rattache au nombre analogue $A(n)$ qui répond à la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2.$$

2. Posons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et parcourons les divers cas qui peuvent se présenter relativement aux exposants α, β.

D'abord, on prouve sans peine que, sous la seule condition de $\alpha > 0$, l'on a

$$B(2^\alpha 3^\beta m) = A(2^\alpha 3^\beta m).$$

Aux formules (1) et (3) de l'article précédent répondent donc les deux formules ci-après :

1° Pour α et $\beta > 0$,

$$B(2^\alpha 3^\beta m) = 12(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m),$$

de sorte qu'en particulier

$$B(3.2^\alpha m) = 0;$$

2° Pour $\beta = 0$, mais $\alpha > 0$,

$$B(2^\alpha m) = 4\zeta_1(m).$$

Le cas d'un entier impair multiple de 3 n'est guère plus difficile, et je trouve que, sous la condition de $\beta > 0$, l'on a

$$B(3^\beta m) = 4(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m).$$

Le second membre est nul quand $\beta = 1$. Mais il ne l'est jamais pour $\beta > 1$, et l'on a, par exemple,

$$B(9) = 8,$$

résultat confirmé par les identités

$$9 = 2.1^2 + 2.1.1 + 5.1^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,$$
$$9 = 2(-1)^2 + 2(-1)(-1) + 5(-1)^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,$$
$$9 = 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2.1^2 + 2.1.1 + 5.1^2,$$
$$9 = 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(-1)^2 + 2(-1)(-1) + 5(-1)^2,$$
$$9 = 2(-2)^2 + 2(-2).1 + 5.1^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,$$
$$9 = 2(2)^2 + 2.2(-1) + 5(-1)^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,$$
$$9 = 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(-2)^2 + 2(-2).1 + 5.1^2,$$
$$9 = 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(2)^2 + 2.2(-1) + 5(-1)^2,$$

qui contiennent toutes les représentations dont l'entier 9 est susceptible sous la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2.$$

3. Nous n'avons plus à parler que des entiers m impairs et premiers à 3. Mais je n'ai jusqu'à présent obtenu à ce sujet que l'équation suivante :

$$A(m) + 2B(m) = 4\zeta_1(m).$$

Il est vrai que cette équation détermine

$$B(m)$$

quand m est de la forme

$$6l - 1;$$

car, sachant déjà que

$$A(6l-1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l-1),$$

nous pouvons en conclure que l'on a également

$$B(6l-1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l-1).$$

Mais, quand m est de la forme

$$6l + 1,$$

nous n'avons que la seule équation

$$A(6l+1) + 2B(6l+1) = 4\zeta_1(6l+1)$$

entre les deux inconnues

$$A(6l+1)$$

et

$$B(6l+1).$$

Il reste donc à obtenir une seconde équation pour arriver à un résultat

définitif. J'ai cru pourtant que la formule

$$A(6l+1)+2B(6l+1)=4\zeta_1(6l+1)$$

méritait d'être indiquée indépendamment de ce que l'on pourra trouver plus tard. On la vérifiera sur les nombres 1, 7, 13, au moyen des valeurs suivantes

$$A(1)=4, \quad B(1)=0,$$
$$A(7)=0, \quad B(7)=16,$$
$$A(13)=24, \quad B(13)=16,$$

qu'il est aisé de former directement.

PRIX PROPOSÉS

PAR

L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Dans sa dernière séance annuelle, l'Académie des Sciences a proposé un grand nombre de prix au sujet desquels les *Comptes rendus* fourniront tous les détails désirables. Nous croyons bon néanmoins de mentionner ici ceux de ces prix qui peuvent intéresser plus spécialement nos lecteurs.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES,

A DÉCERNER EN 1865.

QUESTION PROPOSÉE POUR 1856, REMISE A 1859, PROPOSÉE DE NOUVEAU, APRÈS MODIFICATION, POUR 1862, ET REMISE A 1865.

Rapport sur le Concours de l'année 1862.

L'Académie avait proposé comme sujet de prix pour 1856, puis remis au Concours pour 1859, *le perfectionnement de la théorie mathématique des marées*. Le prix n'ayant pas été décerné, l'Académie a remis au Concours, pour 1862, la question des marées, en en modifiant l'énoncé de la manière suivante :

« *Discuter avec soin et comparer à la théorie les observations des* » *marées faites dans les principaux ports de France.* »

Une seule pièce a été reçue au Secrétariat. L'auteur de cette pièce explique nettement comment il entend que la question doit être traitée; mais il n'a pu se procurer les observations faites dans nos ports assez à temps pour en faire la discussion complète. Le plan de l'auteur a paru à la Commission reposer sur des bases assez solides pour qu'il y ait lieu d'espérer qu'en accordant un nouveau délai, l'Académie voie

enfin la question dont il s'agit traitée d'une manière digne de fixer son attention. En conséquence, la Commission propose de remettre encore au Concours pour l'année 1865 la question des marées, en conservant l'énoncé qui vient d'être rappelé.

L'Académie adopte la proposition de la Commission.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires devront être déposés, *francs de port,* au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1865, *terme de rigueur.*

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES,

A DÉCERNER EN 1865.

QUESTION SUBSTITUÉE EN 1863 A CELLE DES POLYÈDRES.

L'Académie propose la question suivante :

« *Perfectionner en quelque point important la partie de l'Analyse* » *mathématique qui se rapporte à l'intégration des équations aux* » *dérivées partielles du deuxième ordre.* »

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires devront être déposés, *francs de port,* au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juillet 1865, *terme de rigueur.*

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES,

A DÉCERNER EN 1865.

QUESTION PROPOSÉE POUR 1855, REMPLACÉE PAR UNE AUTRE POUR 1861, REMISE A 1863, PUIS A 1865.

Rapport sur le Concours de l'année 1863.

L'Académie avait proposé pour sujet du prix de Mathématiques la question suivante :

« *Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène*
» *indéfini, pour qu'un système de lignes isothermes, à un instant*
» *donné, reste isotherme après un temps quelconque, de telle sorte*
» *que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du*
» *temps et de deux autres variables indépendantes.* »

Cette question, proposée pour le Concours de 1861, avait été traitée par deux concurrents qui tous deux avaient fait preuve de beaucoup de science et de talent; mais leurs Mémoires, dont l'un renfermait une grave inexactitude, et dont l'autre portait les traces d'une trop grande précipitation, n'avaient pas paru mériter le prix.

La question, remise au Concours pour cette année, n'a donné lieu à aucun travail nouveau, et nous proposons, en conséquence, de remettre la question au Concours pour 1865.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires nouveaux, ou les suppléments aux Mémoires déjà envoyés, devront être déposés, *francs de port,* au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juillet 1865, *terme de rigueur.*

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES,

A DÉCERNER EN 1866.

QUESTION PROPOSÉE EN 1864 POUR 1866.

L'Académie propose pour 1866 la question suivante :

« *Chercher si l'équation séculaire de la Lune, due à la variation*
» *de l'excentricité de l'orbite de la Terre, telle qu'elle est fournie par*
» *les plus récentes déterminations théoriques, peut se concilier avec*
» *les anciennes observations d'éclipses mentionnées par l'histoire.* »

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires devront être déposés, *francs de port,* au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1866, *terme de rigueur.*

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée.

PRIX EXTRAORDINAIRE DE SIX MILLE FRANCS

SUR L'APPLICATION DE LA VAPEUR A LA MARINE MILITAIRE,

A DÉCERNER EN 1866.

QUESTION PROPOSÉE POUR 1857, REMISE A 1859, PROROGÉE A 1862, PUIS A 1864, ET REMISE DE NOUVEAU A 1866.

Rapport sur le Concours de l'année 1864.

Au milieu des expériences prodigieuses que présentent les constructions, les mécanismes et l'armement des navires de guerre qui surpassent les limites auxquelles on s'était précédemment arrêté, il est vraiment regrettable que l'Académie n'ait pas reçu de Mémoire qui donnât les éléments et la démonstration d'un seul perfectionnement nouveau et considérable.

En conséquence, nous sommes obligés de déclarer qu'il y a lieu de remettre à l'année 1866 le prix fondé par le Ministre de la Marine.

Les Mémoires, plans et devis devront être adressés au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin.

Nous avons l'espoir qu'alors l'Académie pourra décerner le prix pour quelque progrès digne de notre époque.

PRIX D'ASTRONOMIE,

FONDÉ PAR M. DE LALANDE,

A DÉCERNER EN 1865.

La médaille fondée par M. de Lalande, pour être accordée annuellement à la personne qui, en France ou ailleurs (les Membres de l'Institut exceptés), aura fait l'observation la plus intéressante, le Mémoire ou le travail le plus utile au progrès de l'astronomie, sera décernée dans la prochaine séance publique de 1865.

PRIX DE MÉCANIQUE,

FONDÉ PAR M. DE MONTYON,

A DÉCERNER EN 1865.

M. de Montyon a offert une rente sur l'État, pour la fondation d'un prix annuel en faveur de celui qui, au jugement de l'Académie des Sciences, s'en sera rendu le plus digne en inventant ou en perfectionnant des instruments utiles au progrès de l'agriculture, des arts mécaniques ou des sciences.

Ce prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *quatre cent cinquante francs*.

Le terme de ce Concours est fixé au 1er juin de chaque année.

PRIX BORDIN,

A DÉCERNER EN 1865.

QUESTION PROPOSÉE POUR 1862, PROROGÉE A 1864, PUIS A 1865.

Rapport sur le Concours de l'année 1864.

« *Étude d'une question laissée au choix des concurrents, et relative*
» *à la théorie des phénomènes optiques.* »

Quatre Mémoires ont été envoyés au Concours; parmi ces Mémoires, votre Commission a distingué les pièces inscrites sous le n° 3 et sous le n° 4 comme satisfaisant aux conditions principales du Concours; mais ayant reconnu que l'une et l'autre de ces pièces présentent certaines parties incomplètes, pour lesquelles le temps paraît avoir manqué aux auteurs, votre Commission vous propose de proroger le Concours jusqu'à l'année prochaine, en réservant les droits des Mémoires inscrits sous les nos 3 et 4.

L'Académie adopte la proposition de la Commission.

Le prix sera décerné dans la séance publique de 1865; il consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être remis, *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1865.

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qui ne seront ouverts que si la pièce est couronnée.

PRIX BORDIN,

A DÉCERNER EN 1865.

QUESTION PROPOSÉE EN 1862 POUR 1864 ET PROROGÉE A 1865

Rapport sur le Concours de l'année 1864.

La question proposée était :

« *Apporter un perfectionnement notable à la théorie mécanique* » *de la chaleur.* »

Quatre Mémoires volumineux ont été adressés pour le Concours.

La Commission chargée de les examiner, et qui a été nommée le 25 avril 1864, n'a pu terminer ce long examen.

La Commission propose à l'Académie de laisser le Concours ouvert jusqu'au 1er juin 1865. Le prix serait décerné à la séance publique de l'année prochaine.

L'Académie adhère à cette proposition, mais elle décide que la même Commission [*] sera chargée de l'examen des travaux envoyés.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires devront être remis, *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1865, *terme de rigueur.*

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qui ne seront ouverts que si la pièce est couronnée.

PRIX BORDIN,

A DÉCERNER EN 1866.

QUESTION SUBSTITUÉE EN 1864 A CELLE DES COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

L'Académie propose pour 1866 la question suivante :

« *Déterminer les indices de réfraction des verres qui sont aujour-* » *d'hui employés à la construction des instruments d'optique et de* » *photographie.*

[*] MM. Regnault, Pouillet, Combes, Duhamel, Fizeau.

» *Ces indices seront rapportés aux raies du spectre.*

» *Les matières seront désignées par les noms des fabriques françaises » ou étrangères d'où elles sortent.*

» *Les pesanteurs spécifiques et les températures seront déterminées » avec grand soin.* »

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être déposés, *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1866, *terme de rigueur*.

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée.

PRIX BORDIN,

A DÉCERNER EN 1866.

QUESTION PROPOSÉE EN 1864 POUR 1866.

L'Académie propose pour 1866 la question suivante :

« *Déterminer par de nouvelles expériences et d'une manière très-» précise les longueurs d'onde de quelques rayons de lumière simple, » bien définis.* »

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être déposés, *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1866, *terme de rigueur*.

Les noms des auteurs seront contenus dans des billets cachetés, qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée.

PRIX DAMOISEAU,

A DÉCERNER EN 1865.

Un décret impérial, en date du 13 mai 1863, a autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation, qui lui a été faite par Madame la Baronne veuve de Damoiseau, d'une somme de *vingt mille francs*, « dont le revenu est destiné à former le montant d'un prix annuel qui » recevra la dénomination de *prix Damoiseau*.

» Ce prix sera décerné par l'Académie à l'auteur, français ou étranger, du Mémoire de théorie suivi d'applications numériques qui lui paraîtra le plus utile au progrès de l'astronomie. Il pourra aussi être partagé entre plusieurs savants.

» Lorsque l'Académie le jugera convenable, l'auteur d'un Mémoire couronné pourra recevoir le montant du prix pendant plusieurs années consécutives.

» S'il n'y avait pas lieu de décerner ce prix, l'Académie pourrait en employer la valeur en encouragements pour des travaux astronomiques du même genre.

» Ce prix, quand l'Académie le jugera utile au progrès de la science, pourra être converti en prix triennal sur une question proposée. »

En conséquence, l'Académie annonce que ce prix sera décerné, pour la première fois, dans sa séance publique annuelle de 1865.

Les ouvrages devront être parvenus, *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut, avant le 1er juin 1865, *terme de rigueur*.

NOTE

Sur la surface enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite [*];

PAR M. DE LA GOURNERIE.

Nous appelons *tore enveloppe* la surface de révolution enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite. Sa polaire réciproque par rapport à une sphère dont le centre se trouve sur l'axe de révolution est un autre tore enveloppe : les surfaces du second ordre respectivement enveloppées par les tores sont polaires réciproques l'une de l'autre. Les méridiennes de ces deux tores sont aussi réciproquement polaires par rapport au grand cercle de la sphère directrice contenu dans leur plan.

Les singularités d'une surface de révolution qui peuvent abaisser le degré de sa polaire sont les parallèles doubles, les parallèles de rebroussement et les points coniques sur l'axe. En remarquant que l'ordre d'une surface de ce genre est le même que celui de sa méridienne complète, et que chaque parallèle coupe un plan méridien en deux points, on trouve que la formule qui fait connaître le degré de la polaire réciproque est

$$n' = n(n-1) - 4x - 6y - 2z;$$

n est le degré de la surface, n' celui de la polaire; x, y et z sont les nombres des parallèles doubles, des parallèles de rebroussement et des points coniques. L'ordre de chacune des variétés du tore enveloppe a été, en général, déterminé par des considérations directes, puis vérifié par cette formule.

[*] Cette Note contient quelques-uns des résultats d'un Mémoire qui paraîtra dans le XLIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Nous examinerons presque exclusivement le cas où la surface du second ordre enveloppée est un cône : le tore enveloppe est alors la polaire réciproque du *tore général*, c'est-à-dire de la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace.

Les résultats que nous donnons sur cette importante variété ont été obtenus, en grande partie, par la transformation polaire des propriétés du tore général [*].

Nous supposerons toujours que l'axe de révolution est vertical.

Cas où la surface enveloppée est un cône.

1. La surface enveloppe des positions d'un cône du second ordre qui tourne autour d'une droite est du huitième ordre et de la quatrième classe. Elle s'abaisse au sixième ordre quand le cône donné a un plan tangent horizontal, et quand le plan méridien du sommet du cône est perpendiculaire au plan tangent de cette surface le long de l'une des deux génératrices qu'il contient. Le tore est du quatrième ordre seulement lorsque les sections horizontales du cône sont des cercles, et lorsque le cône se change en un cylindre horizontal; il se réduit à une surface du second ordre quand l'axe de révolution est dans un des plans principaux du cône.

Nous consacrerons des paragraphes distincts aux variétés qui sont du quatrième ordre et du second ordre.

2. Le tore est doublement inscrit dans un cône de révolution ayant même axe que lui.

Il a quatre cônes asymptotes tous de révolution. Leurs génératrices ont respectivement la même inclinaison que celles des génératrices du cône enveloppé qui sont normales aux sections horizontales de cette surface.

3. Un point de l'axe est le centre de quatre parallèles réels ou de deux

[*] *Voir* sur le tore général la Note que nous avons publiée dans le tome VIII de ce journal, et notre Mémoire inséré au XLe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

seulement, suivant qu'il se trouve dans l'intérieur ou à l'extérieur du cône formé par les développées des sections horizontales du cône donné. Tout point de l'axe situé sur ce nouveau cône, est le centre de deux parallèles ordinaires et d'un parallèle de rebroussement. On reconnaît ainsi que le tore a six parallèles de rebroussement dont deux sont imaginaires; les autres peuvent être réels.

4. Les cônes symétriques des cônes enveloppés, par rapport à un plan méridien quelconque, sont, comme eux, circonscrits à la surface. Le tore admet ainsi deux séries de cônes enveloppés égaux, ayant leurs sommets aux divers points d'un même cercle qui est un parallèle double, ou un parallèle isolé.

L'ensemble de deux cônes appartenant aux deux séries, et ayant leurs sommets en un même point, forme le cône circonscrit complet dont le sommet est à ce point.

Le cône circonscrit au tore enveloppe est, en général, du huitième ordre; dans le cas actuel il n'est que du quatrième, parce que son sommet est en un point double de la surface.

5. Le tore possède deux autres parallèdes doubles ou isolés. Tout point de chacun d'eux est le sommet de deux cônes du second ordre circonscrits. La surface a donc trois parallèles doubles et trois systèmes de cônes enveloppés, composés chacun de deux séries.

Un tore étant donné par un cône enveloppé et par l'axe de révolution supposé vertical, le premier parallèle double est décrit par le sommet du cône; le second se trouve dans le plan de celle des sections horizontales de cette surface, dont l'axe non focal rencontre l'axe de révolution. Le troisième est dans le plan de la section horizontale dont l'axe focal rencontre l'axe de révolution.

Les deux premiers parallèles doubles et les cônes qui leur correspondent sont toujours réels. Le troisième est quelquefois réel et quelquefois imaginaire : dans tous les cas les cônes circonscrits qui ont leurs sommets à ses différents points sont imaginaires.

Deux des parallèles doubles peuvent être concentriques.

6. Les sections horizontales des cônes enveloppés des deux systèmes réels sont de genres différents.

Quand les cônes du système donné ont pour sections horizontales des paraboles, les cônes du second système réel se confondent avec eux. Dans ce cas la surface est seulement du sixième ordre (n° **1**). Le parallèle décrit par le sommet du cône est simple ; mais on peut considérer le plan horizontal tangent au cône comme appartenant deux fois au tore enveloppe, et alors le cercle décrit par le sommet du cône est la réunion de deux parallèles doubles.

7. Les cônes enveloppés coupent l'axe aux deux mêmes points.

Les mêmes points de l'axe sont dans la concavité des cônes des deux systèmes réels, et les mêmes points en dehors de ces surfaces.

Les cônes lieux des développées des sections horizontales des cônes enveloppés coupent l'axe aux mêmes points.

8. Toute surface du second ordre inscrite dans le cône de révolution doublement circonscrit, et tangente au tore enveloppe en deux points non situés sur ce cône, est inscrite dans deux cônes enveloppés appartenant aux deux séries d'un même système.

9. Toute surface du second ordre inscrite dans le cône doublement circonscrit, et dans un cône enveloppé, est également inscrite dans un autre cône enveloppé appartenant à la deuxième série du même système.

Caractéristiques. — Lorsque l'on connaît un cône enveloppé, on peut, par des constructions faciles, déterminer le sommet et la trace du second cône enveloppé réel dans une de ses positions, les caractéristiques des deux cônes avec leurs tangentes, et enfin la méridienne.

Nous donnerons sur les caractéristiques le théorème suivant qui est applicable toutes les fois que la trace horizontale du cône enveloppé est une courbe algébrique.

10. La section horizontale du cône enveloppé étant une courbe de l'ordre m et de la classe n, la projection horizontale de la caractéristique est une courbe de l'ordre $(m+n)$ qui a deux points multiples, l'un de l'ordre m à la trace de l'axe, l'autre de l'ordre n à la projection du sommet du cône.

La surface de révolution enveloppe du cône est de l'ordre $2(m+n)$.

Tore à conique méridienne.

11. Quand un cône dont les sections horizontales sont circulaires tourne autour d'une droite verticale, la surface de révolution enveloppe de ses positions a pour méridienne une hyperbole dans laquelle le diamètre conjugué aux cordes horizontales n'est pas transverse.

Les cônes enveloppés du second système sont les cylindres horizontaux tangents à la surface le long des hyperboles méridiennes.

La surface possède un seul parallèle double qui est décrit par le sommet du cône. Les deux autres parallèles doubles se changent en parallèles isolés de rayon infini.

12. Quand une conique tourne autour d'un axe situé dans son plan et supposé vertical, la surface de révolution qu'elle engendre enveloppe les positions qu'occupe en tournant un cône dont les sections horizontales sont des cercles. Ce cône n'est réel que quand la conique est une hyperbole, et que le diamètre conjugué aux cordes horizontales n'est pas transverse.

On voit que l'on obtient une même surface dans les deux dispositions que nous avons indiquées (n° 1) comme donnant naissance à un tore enveloppe du quatrième ordre.

13. La conique qui a l'un de ses axes sur l'axe de révolution, et dont les cordes horizontales ont la même longueur que celles de la conique méridienne, partage en parties égales les cordes horizontales comprises entre les arcs non homologues des deux coniques qui forment la méridienne complète.

La considération de cette courbe, et principalement de ses asymptotes, conduit à des constructions très-faciles pour déterminer le cône enveloppé quand on connaît la méridienne, ou cette courbe quand le cône est donné.

14. Lorsque le cône est remplacé par un cylindre, les sections horizontales restant circulaires, l'axe non transverse de l'hyperbole méridienne devient parallèle à l'axe de révolution.

Si l'on diminue progressivement le rayon des sections du cylindre, les deux hyperboles qui composent la méridienne complète se rappro-

chent ; elles se superposent quand le rayon est nul : le tore est alors un hyperboloïde à une nappe, et les cylindres enveloppés des deux séries, réduits à des droites, forment les génératrices rectilignes des deux systèmes.

La projection horizontale de la courbe de contact du cylindre avec le tore est une conchoïde.

Surfaces de révolution du second ordre.

15. Lorsqu'un cône du second ordre tourne autour d'une droite située dans l'un de ses plans principaux, la surface enveloppe se compose de deux fois une zone d'une surface du second ordre. Les courbes de contact des cônes des deux systèmes sont deux coniques non superposables et tangentes aux deux parallèles qui limitent la zone. On peut considérer ces courbes comme des génératrices, et par suite la zone comme un tore général.

16. Les deux coniques tangentes à deux mêmes parallèles que l'on peut tracer sur une surface du second ordre sont telles, que les segments interceptés sur leurs axes par leurs foyers sont égaux entre eux, et égaux à la distance des parallèles mesurée sur une génératrice rectiligne, quand la surface est un hyperboloïde à une nappe.

17. Lorsque les coniques sont de même genre, leurs projections horizontales jouissent, par rapport à la trace de l'axe, des mêmes propriétés réciproques que les projections des coniques génératrices d'un tore général [*].

18. Lorsque la surface est un hyperboloïde à une nappe, les coniques sont de genres différents : les projections horizontales de ces lignes et du segment de la génératrice rectiligne jouissent, par rapport à la trace de l'axe prise pour origine, des propriétés suivantes :

Le grand axe de l'ellipse est égal à la somme des rayons vecteurs des foyers de l'hyperbole;

---

[*] *Voir* l'article 64 de notre Mémoire dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

L'axe transverse de l'hyperbole est égal à la différence des rayons vecteurs des foyers de l'ellipse;

Le segment de l'axe compris entre les foyers dans l'une et l'autre courbe a une longueur égale à la projection de la génératrice rectiligne comprise entre les deux parallèles;

Les hypoténuses des triangles construits sur le rayon vecteur du centre et le demi-axe focal, dans les deux courbes, sont égales entre elles, et aussi à l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur la moitié de la projection de la génératrice, et sur le rayon vecteur du point milieu de cette droite;

L'hypoténuse du triangle rectangle construit sur le rayon vecteur du centre de l'ellipse et sur son demi-axe focal, est égal au second côté du triangle rectangle qui a pour hypoténuse le rayon vecteur du centre de l'hyperbole, et pour premier côté la longueur réelle de la moitié de l'axe non transverse de cette courbe; elle est encore égale au rayon vecteur du point milieu du segment de la génératrice;

Les normales abaissées de la trace de l'axe sur les deux coniques sont égales deux à deux; pour chaque courbe deux des normales sont égales à la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le segment de la génératrice; les deux autres sont respectivement égales aux rayons vecteurs des extrémités de ce segment.

Cas où la surface enveloppée est du second ordre, mais d'ailleurs quelconque.

19. Lorsqu'une surface du second ordre tourne autour d'une droite, la surface enveloppe de ses positions est du huitième ordre et de la huitième classe; elle a deux points coniques, deux parallèles doubles et six parallèles de rebroussement. Il existe sur l'axe deux points qui sont les sommets de cônes doublement circonscrits à la surface.

Les surfaces du second ordre symétriques des surfaces enveloppées par rapport à un plan méridien quelconque, sont, comme elles, inscrites dans le tore qui admet ainsi deux séries de surfaces du second ordre enveloppées égales.

20. Quand une surface du second ordre dont les sections horizon-

tales sont circulaires tourne autour d'une droite verticale, l'enveloppe de ses positions est une surface du quatrième ordre et de la huitième classe, qui a deux points coniques et qui ne possède, en général, ni parallèle double, ni parallèle de rebroussement.

21. Quand une surface du second ordre tourne autour d'une droite située dans un de ses plans principaux, l'enveloppe de ses positions comprend : 1° un tore général qui a pour méridienne la section de la surface par le plan dans lequel se trouve l'axe ; 2° une surface du second ordre qui touche l'enveloppée le long d'une conique.

Chacune de ces deux surfaces peut être imaginaire. Lorsque la seconde existe, son contact avec l'enveloppée est quelquefois partiellement ou même totalement idéal.

Observations sur le problème des coniques tangentes à quatre cercles concentriques.

Un point et une conique étant donnés sur un plan, on peut se proposer de déterminer d'autres coniques telles, que les quatre normales qui leur sont abaissées du point aient les mêmes longueurs que les quatre normales abaissées du même point sur la conique donnée. Cette courbe et celles que l'on cherche sont tangentes à quatre mêmes cercles concentriques.

Il n'y a que quatre conditions pour déterminer les coniques, et par conséquent le problème est indéterminé ; mais quand on aura une de ces courbes on pourra la faire tourner autour du point, et la renverser dans des positions symétriques par rapport aux droites qui passent par le point, sans qu'elle cesse de toucher les quatre cercles. Le problème consiste donc à déterminer les coniques distinctes, c'est-à-dire non superposables. On peut exiger que leurs centres soient sur un certain diamètre des cercles : ce sera la cinquième condition.

22. Nous supposerons d'abord que la conique donnée n'a aucun de ses axes dirigé vers le point fixe, qu'elle ne passe pas par ce point et qu'elle a un centre.

Dans ce cas, il existe toujours trois coniques réelles qui satisfont aux conditions du problème ; en ajoutant celle qui est donnée, on a quatre coniques tangentes à quatre cercles concentriques. Ce sont :

A une ellipse ayant le point fixe du côté de sa concavité;
B une ellipse ayant le point fixe du côté de sa convexité;
C une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa concavité;
D une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa convexité.

23. Les deux ellipses sont les projections horizontales de deux coniques génératrices d'un tore général, dont l'axe vertical a sa trace horizontale au point fixe. Il en est de même des deux hyperboles.

L'ellipse A et l'hyperbole C sont les traces de deux cônes enveloppés d'un même tore enveloppe dont l'axe a sa trace au point fixe. La même relation existe entre l'ellipse B et l'hyperbole D.

24. Si l'on prend les polaires réciproques des quatre courbes par rapport à un cercle ayant son centre au point fixe ou origine, on aura quatre coniques tangentes à quatre nouveaux cercles concentriques :

A′ une ellipse ayant le point fixe du côté de sa concavité;
B′ une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa concavité;
C′ une ellipse ayant le point fixe du côté de sa convexité;
D′ une hyperbole ayant le point fixe du côté de sa convexité.

Les courbes de même genre A′ et C′ d'une part, B′ et D′ de l'autre, ont entre elles les relations qui ont été indiquées dans le premier alinéa du n° 23.

Les courbes A′ et B′ sont les traces de cônes enveloppés d'un même tore enveloppe. Il en est de même de C′ et D′.

25. Quand le point fixe est sur la conique donnée, les courbes B et D se confondent respectivement avec A et C. En prenant les polaires réciproques, comme il a été expliqué au numéro précédent, on trouve deux coniques tangentes à trois mêmes cercles concentriques et à la droite de l'infini :

A une ellipse passant par le point fixe;
C une hyperbole passant par le point fixe;
A′ une parabole ayant le point fixe du côté de sa concavité;
C′ une parabole ayant le point fixe du côté de sa convexité.

A et C sont les traces de cônes enveloppés d'un même tore enveloppe; A′ et C′ les projections de coniques génératrices d'un même tore général.

26. Quand la conique donnée a un axe dirigé vers le point fixe, deux des quatre cercles concentriques sont confondus en un seul. Il faut alors déterminer des coniques ayant avec un cercle un contact double (réel ou idéal), et un contact simple avec deux autres cercles. On trouve quatre courbes, y compris celle qui est donnée, et de plus des systèmes de points et de droites qui peuvent être assimilés à des coniques.

Les quatre coniques ont deux à deux les relations qui existent entre les projections des coniques qui engendrent une zone d'une surface du second ordre, et entre les traces de cônes qui sont circonscrits à une semblable zone. Deux de ces quatre courbes sont quelquefois imaginaires.

NOTE AU SUJET DE LA FORME
$x^2+y^2+a(z^2+t^2)$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Je veux communiquer dans cette Note un théorème au sujet de la forme

$$x^2+y^2+a(z^2+t^2),$$

où le coefficient constant a du second binôme est un nombre premier. Ce théorème consiste en ce que, si l'on s'est procuré par un moyen quelconque la valeur du nombre

$$N[q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)]$$

des représentations d'un entier q, non multiple de a, par la forme

$$x^2+y^2+a(z^2+t^2),$$

il sera toujours facile d'en conclure le nombre

$$N\left[a^\alpha q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)\right]$$

des représentations (par cette même forme) de l'entier

$$a^\alpha q,$$

qui résulte du produit de q et d'une puissance de a. Nous parlons ici du nombre total des représentations tant propres qu'impropres, en sorte que

$$N\left[a^\alpha q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)\right]$$

exprime le nombre des solutions que l'équation

$$a^\alpha q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)$$

comporte quand on admet pour valeurs de x, y, z, t tous les entiers possibles, positifs, nuls ou négatifs, eussent-ils un diviseur commun > 1.

Le cas de $a = 2$ n'offre aucune difficulté; alors q est impair, et il s'agit de la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha q = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)\right],$$

laquelle est double de celle de

$$\mathrm{N}\left[q = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)\right],$$

ou bien en est le sextuple, suivant que l'on a $\alpha = 1$, ou $\alpha > 1$.

Le cas de a premier $4\mu + 3$ est plus facile encore; la valeur de

$$\mathrm{N}\left[a^\alpha q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right]$$

est alors toujours égale à celle de

$$\mathrm{N}\left[q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right].$$

Reste le cas de a premier $4\mu + 1$; c'est celui-là seul que nous considérerons dans ce qui va suivre.

Comme α est ici la seule variable, nous poserons

$$\mathrm{N}\left[a^\alpha q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right] = \psi(\alpha),$$

et en particulier

$$\mathrm{N}\left[q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right] = \psi(0).$$

La valeur de

$$\psi(0)$$

est donc supposée connue, et il s'agit d'en déduire celle de

$$\psi(\alpha).$$

Soit

$$q = 2^s m,$$

m étant un entier impair. On pourra avoir

$$s = 0,$$

ou bien

$$s > 0.$$

Plaçons-nous successivement dans ces deux conditions distinctes.

2. Lorsqu'on a $s = 0$, en sorte que q se réduit à un entier impair m (naturellement non divisible par a), je trouve entre les deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

la relation suivante

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{16(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m),$$

où je représente à mon ordinaire par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de

$$m.$$

C'est une équation aux différences finies, aisée à intégrer. On en tire

$$(1)\quad \psi(\alpha) = \frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{8}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

La question proposée est ainsi très-simplement résolue.

Pour $a = 5$, la formule (1) devient

$$\psi(\alpha) = \frac{2}{3}(5^{\alpha+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right],$$

et cette valeur s'accorde avec ce que nous avons dit dans le cahier de janvier au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2).$$

Les nombres premiers $4\mu + 1$ qui viennent après 5 sont 13, 17, etc. On pourra donc faire $a = 13$, $a = 17$, etc., et l'on aura ainsi pour

chacun des nombres premiers cités une formule particulière. Pour $a = 13$, par exemple, on a

$$\psi(\alpha) = \frac{2}{21}(13^{\alpha+1} - 7)\zeta_1(m) + (-1)^\alpha \left[\psi(0) - \frac{4}{7}\zeta_1(m)\right].$$

Quel que soit le nombre premier $4\mu + 1$ choisi pour valeur de a dans la formule (1), on aura évidemment

$$\psi(0) = 4$$

pour

$$m = 1.$$

Donc, pour $m = 1$, la valeur générale de $\psi(\alpha)$ est

$$\frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{4(a-1)}{a+1}(-1)^\alpha.$$

Telle est donc la valeur de

$$\mathrm{N}\left[a^\alpha = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right].$$

De même, pour

$$m = 3,$$

on a toujours

$$\psi(0) = 0,$$

d'où

$$\psi(\alpha) = \frac{32(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} - \frac{32}{a+1}(-1)^\alpha.$$

La valeur de

$$\mathrm{N}\left[3a^\alpha = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right]$$

s'exprime donc par

$$\frac{32(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} - \frac{32}{a+1}(-1)^\alpha.$$

Je ne m'arrêterai pas davantage à ces détails.

3. Qu'il s'agisse à présent d'un entier pair, en sorte que l'on ait

$$q = 2^s m, \quad s > 0.$$

La relation entre

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha+1)$$

sera cette fois

$$\psi(\alpha+1) + \psi(\alpha) = \frac{3.16(a^{\alpha+1}-1)}{a-1}\zeta_1(m);$$

le second membre est triple de ce qu'il était tout à l'heure. Voilà donc encore une équation aux différences finies à intégrer. L'intégration donne sans peine

$$(2) \quad \psi(\alpha) = \frac{24(2a^{\alpha+1}-a-1)}{a^2-1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{24}{a+1}\zeta_1(m)\right]:$$

et la question proposée est résolue.

Pour $a = 13$, par exemple,

$$\psi(\alpha) = \frac{2}{7}(13^{\alpha+1}-7) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{12}{7}\zeta_1(m)\right].$$

Quel que soit le nombre premier représenté par a dans la formule (2), on a

$$\psi(0) = 4$$

pour

$$s = 1, \quad m = 1,$$

c'est-à-dire pour

$$q = 2.$$

Donc, pour

$$q = 2,$$

on a toujours

$$\psi(\alpha) = \frac{24(2a^{\alpha+1}-a-1)}{a^2-1} + \frac{4(a-5)}{a+1}(-1)^\alpha.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$N\left[2a^{\alpha} = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right]$$

est

$$\frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{4(a-5)}{a+1}(-1)^{\alpha}.$$

Prenons, par exemple,

$$a = 13;$$

la valeur de

$$N\left[2.13^{\alpha} = x^2 + y^2 + 13(z^2 + t^2)\right]$$

devra être

$$\frac{2}{7}(13^{\alpha+1} - 7) + \frac{16}{7}(-1)^{\alpha};$$

de là, en faisant $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, etc., on conclut

$$N\left[2.13 = x^2 + y^2 + 13(z^2 + t^2)\right] = 44,$$

puis

$$N\left[2.13^2 = x^2 + y^2 + 13(z^2 + t^2)\right] = 628,$$

et ainsi de suite. L'équation

$$N\left[2.13 = x^2 + y^2 + 13(z^2 + t^2)\right] = 44$$

est confirmée par les identités

$$26 = (\pm 1)^2 + (\pm 5)^2 + 13(0^2 + 0^2),$$
$$26 = (\pm 2)^2 + (\pm 3)^2 + 13[0^2 + (\pm 1)^2],$$
$$26 = 0^2 + 0^2 + 13[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],$$

dont les deux premières comportent des permutations auxquelles on doit avoir égard. Je laisse au lecteur à pousser plus loin les vérifications.

NOTE AU SUJET DE LA FORME

$x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je veux communiquer dans cette Note un théorème au sujet de la forme

$$x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2,$$

où l'entier constant a est un nombre premier. Le théorème dont il s'agit consiste en ce que si l'on s'est procuré par un moyen quelconque la valeur du nombre

$$N(q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

des représentations d'un entier q, non multiple de a, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2,$$

il sera toujours facile d'en conclure le nombre

$$N(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

des représentations (par cette même forme) de l'entier

$$a^\alpha q,$$

qui résulte du produit de q et d'une puissance de a. Nous parlons ici du nombre total des représentations tant propres qu'impropres, en sorte que

$$N(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

exprime le nombre des solutions que l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$$

comporte quand on admet pour valeurs de x, y, z, t tous les entiers possibles, positifs, nuls ou négatifs, eussent-ils un diviseur commun > 1.

2. Le cas de $a = 2$ n'offre aucune difficulté. Il répond à la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

dont nous avons parlé ailleurs (Cahier de janvier 1862) de manière à n'avoir pas besoin d'y revenir ici.

Le cas de a premier $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$, c'est-à-dire non diviseur de $t^2 + 2u^2$, n'est pas moins facile. En effet l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$$

ne peut avoir lieu pour $\alpha > 0$, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, qu'avec des valeurs de x et de y multiples de a. Or, en faisant $x = ax'$, $y = ay'$, cette équation se réduit à celle-ci

$$a^{\alpha-1} q = z^2 + 2t^2 + ax'^2 + 2ay'^2,$$

qui est de même forme, mais où l'exposant de a dans le premier membre se trouve diminué d'une unité. En répétant l'opération tant que cet exposant n'est pas nul, on arrive à cette conclusion que la valeur de

$$\mathrm{N}\left(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2\right)$$

ne diffère pas de celle de

$$\mathrm{N}(q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2),$$

que nous supposons connue.

Désormais donc nous ne prendrons pour a qu'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $8\mu + 1$, $8\mu + 3$. Comme α est la seule variable, nous poserons

$$\mathrm{N}\left(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2\right) = \psi(\alpha),$$

et en particulier

$$N(q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = \psi(0).$$

La question sera de déterminer

$$\psi(\alpha),$$

connaissant

$$\psi(0).$$

Soit

$$q = 2^s m,$$

m étant un entier impair (naturellement non multiple de q) et l'exposant s pouvant se réduire à zéro. Nous supposerons d'abord

$$s = 0,$$

puis

$$s = 1,$$

enfin

$$s > 1,$$

ce qui nous conduira à trois formules distinctes.

3. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair (ou du cas de $s = 0$), en sorte que l'on ait

$$\psi(\alpha) = N(a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2),$$

m étant un entier impair, non divisible par le nombre premier a (que nous supposerons, comme on l'a vu, de l'une des deux formes $8\mu + 1$, $8\mu + 3$). Je trouve qu'il existe entre les deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

la relation suivante

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{8(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1} \zeta_1(m),$$

où je représente à mon ordinaire par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de m. Cette relation n'est autre chose qu'une équation aux différences finies, très-facile à intégrer, et l'on en tire

$$(1)\quad \psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{a+1}\zeta_1(m)\right],$$

ce qui résout, pour le cas dont nous nous occupons, la question proposée. On pourra appliquer la formule (1) aux diverses valeurs

$$3,\ 11,\ 17,\ 19,\ldots,$$

que a peut prendre; en faisant en particulier $a = 3$, on retrouvera un résultat que nous avons déjà donné (dans le Cahier de septembre 1864) en nous occupant de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

Pour

$$m = 1,$$

on a

$$\zeta_1(m) = 1$$

et

$$\psi(0) = 2,$$

quel que soit l'entier pris pour a dans la suite 3, 11, 17, 19,.... De là

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a+1}(-1)^\alpha.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$N(a^\alpha = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

s'exprime par

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a+1}(-1)^\alpha.$$

Par exemple,

$$N(a = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 6;$$

la grandeur de a n'influe pas sur le second membre, et l'on voit aisément *à priori* qu'il en devait être ainsi. On a ensuite

$$N(a^2 = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 8a + 2.$$

Il serait aisé de continuer; mais je ne m'arrête pas à ces détails.

4. Qu'il s'agisse maintenant d'un entier impairement pair (ou du cas de $s = 1$), en sorte que l'on ait

$$\psi(\alpha) = N(2a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2).$$

La relation entre

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

sera cette fois

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{16(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1} \zeta_1(m),$$

et l'on en conclura la formule suivante :

$$(2) \quad \psi(\alpha) = \frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} \zeta_1(m) + (-1)^\alpha \left[\psi(0) - \frac{8}{a+1} \zeta_1(m)\right].$$

Pour

$$m = 1,$$

par exemple, on a

$$\zeta_1(m) = 1$$

et

$$\psi(0) = 2,$$

partant

$$\psi(\alpha) = \frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 6}{a + 1}(-1)^\alpha.$$

La valeur de

$$N(2a^\alpha = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

s'exprime donc par

$$\frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 6}{a + 1}(-1)^\alpha.$$

Ainsi on a en particulier

$$N(2a = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 14,$$

quel que soit l'entier a pris dans la suite 3, 11, 17, 19,.... Puis

$$N(2a^2 = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 16a + 2,$$

et ainsi de suite.

5. Qu'il s'agisse enfin d'un entier pairement pair, en sorte que l'on ait

$$\psi(\alpha) = N(2^s a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2),$$

avec

$$s > 1.$$

La relation entre

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

sera dans cette hypothèse :

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{48(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m),$$

et l'on en tirera

$$(3)\quad \psi(\alpha) = \frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{24}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

La valeur de

$$N(2^s a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

par

$$\frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{24}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Je laisse au lecteur à vérifier ce résultat sur des exemples.

SUR LA DÉTERMINATION

Des nombres de valeurs que prennent les fonctions par les permutations des lettres qu'elles renferment;

Par M. DESPEYROUS.

Considérons une fonction d'un nombre quelconque m de variables indépendantes a, b, c,..., k, l, et supposons que l'on échange entre elles ces variables de toutes les manières possibles. Si la fonction est symétrique, elle ne changera pas de valeur par suite d'un échange quelconque de ces lettres; mais si elle n'est pas symétrique, elle prendra par suite de ces échanges un nombre de valeurs distinctes qui dépendra de la forme de cette fonction, nombre qui sera évidemment égal au plus au nombre total des permutations $1.2.3...m$ qu'offrent ces m lettres. Entre ces limites, l'unité et le produit $1.2.3...m$, il y a plusieurs nombres qui ne peuvent, dans aucun cas, représenter le nombre de valeurs distinctes que prennent les fonctions par les permutations des lettres qu'elles renferment.

De là résulte l'importance de la solution des deux questions suivantes, corrélatives l'une à l'autre : « Quels sont les nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions par les permutations des variables qu'elles renferment? Comment peut-on former des fonctions dont les nombres de leurs valeurs distinctes soient les nombres trouvés? »

L'Académie des Sciences proposa, en 1858, pour sujet du grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1860, la solution de ce double problème, et elle ajouta que « sans exiger des concurrents une solution complète, qui serait sans doute bien difficile, elle pourrait accorder le prix à l'auteur du Mémoire qui ferait faire un progrès

» notable à cette théorie [*]. » En mars 1860, M. Serret, rapporteur du résultat de ce concours, déclara qu'il n'y avait pas lieu à décerner le prix, et la question fut retirée [**].

Cauchy, celui de tous les géomètres qui s'est le plus occupé de cette théorie, a fait dépendre la solution de la double question proposée de la détermination des nombres de valeurs distinctes des fonctions *transitives* [***], détermination qui est loin d'être complète malgré les travaux récents des auteurs qui ont suivi la marche tracée par ce grand géomètre. Nous avons attaqué la question avec des principes très-différents : ceux dont nous nous sommes servi se rattachent à un ordre d'idées entièrement nouveau, à la *théorie de l'ordre,* créée par Poinsot : « théorie, dit ce géomètre, neuve et profonde, dont les élé-
» ments sont à peine connus, mais qu'on doit regarder comme le
» premier fondement de l'Algèbre et la source naturelle des princi-
» pales propriétés des nombres [****] ».

Nous faisons en effet dépendre la solution du double problème proposé de *toutes* les classifications possibles des permutations de m lettres en groupes de permutations associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer; et ces classifications sont déduites de la théorie de l'ordre, comme nous le montrerons bientôt.

Le travail actuel n'a qu'un but, celui de démontrer le théorème suivant et sa réciproque : Si une fonction de m lettres a s valeurs distinctes, par suite des échanges de ces lettres, on peut partager les permutations qu'elles produisent en s groupes de permutations *inséparables,* quel que soit l'échange de ces lettres. *Réciproquement*, si toutes les permutations de m lettres sont partagées en s groupes de permutations *inséparables*, quel que soit l'échange de ces lettres, il existe des fonctions de m lettres dont le nombre de valeurs distinctes est égal à ce nombre s; et nous donnons le moyen d'en former.

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI, p. 302.

[**] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 555.

[***] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXI et XXII.

[****] *Mémoires de l'Institut* pour les années 1813, 1814, 1815, p. 382.

De là nous concluons qu'effectivement la détermination des nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions de m lettres dépend exclusivement de *toutes* les manières possibles de partager les permutations de ces m lettres en groupes de permutations *inséparables*, c'est-à-dire associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.

Nous désignerons par μ le nombre total des permutations de m lettres, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ces permutations que nous supposerons partagées en s groupes composés chacun de q permutations associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, elles ne puissent jamais se séparer. En sorte qu'on aura

$$\mu = 1.2.3\ldots m, \quad \mu = sq,$$

et le tableau

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \ \beta_1, \ \gamma_1, \ldots, \ \omega_1, \\ \alpha_3, \ \beta_2, \ \gamma_2, \ldots, \ \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_s, \ \beta_s, \ \gamma_s, \ldots, \ \omega_s, \end{array} \right.$$

le nombre de lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ étant égal à q.

THÉORÈME I. — *Toute fonction* V *de m lettres qui sera invariable pour toutes les permutations d'un seul groupe du tableau* (A), *et qui changera de valeur pour une quelconque des permutations de chacun des autres groupes du même tableau, aura s valeurs distinctes quand on y permutera, de toutes les manières possibles, les m lettres qu'elle renferme.*

Admettons en effet que cette fonction V prenne une même valeur V_1 pour toutes les permutations d'un des groupes du tableau (A), du premier par exemple, et qu'elle prenne une valeur différente V_2 pour une permutation quelconque d'un des autres groupes, pour α_2 par exemple du second. Je dis que cette fonction V prendra la même valeur V_2 pour toutes les permutations $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \omega_2$ du même groupe. Car les permutations des s groupes du tableau (A) étant inséparables

pour tout échange de lettres, quel que soit l'échange de lettres nécessaire pour transformer α_1 en α_2, ce même échange de lettres transformera toutes les autres permutations du premier groupe en toutes les autres du second; par exemple, β_1 en δ_2, γ_1 en χ_2, et ainsi de suite.

Or cet échange de lettres transforme par hypothèse α_1 en α_2, et V_1 correspondant à α_1 en V_2 correspondant à α_2; mais V_1 relatif à β_1 n'est autre chose que V_1 relatif à α_1 où l'on a changé seulement la notation d'une certaine manière; donc ce même échange de lettres transformera la valeur V_1 relative à β_1 en la *même* valeur V_2 relative à δ_2.

Par une raison semblable, ce même échange de lettres transformera la valeur V_1 relative à γ_1 en la valeur V_2 relative à χ_2, et ainsi de suite. Donc la fonction V prendra une même valeur V_2 pour toutes les permutations du second groupe.

On démontrerait de la même manière que si la fonction V prenait la valeur V_3 pour une des permutations du troisième groupe, pour α_3 par exemple, cette fonction conserverait la même valeur V_3 pour toutes les autres permutations $\beta_3, \ldots, \omega_3$ de ce même groupe. Il en serait de même pour tous les autres groupes. Donc le théorème énoncé est démontré.

Corollaire. — Si les valeurs $V_1, V_2, \ldots, V_s$ de la fonction V pour les permutations $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ étaient égales entre elles, cette fonction conserverait une valeur unique V_1 pour toutes les permutations des lettres qu'elle renferme : on dit alors que V est symétrique par rapport à ces lettres.

Théorème II. — *Réciproquement, si $\mu = sq$, et si l'on peut décomposer les μ permutations de m lettres en s groupes composés chacun de q permutations, telles qu'une fonction de ces m lettres soit invariable pour les permutations de chacun de ces groupes et prenne s valeurs distinctes pour ces s groupes, les permutations de chacun d'eux sont inséparables, quel que soit l'échange des m lettres qui les forment.*

Supposons en effet qu'une fonction V de m lettres prenne une même valeur pour toutes les permutations d'un quelconque des

s groupes du tableau (A); la valeur V_1 pour toutes celles du premier groupe, la valeur V_2 pour toutes celles du second, etc., et enfin la valeur V_s pour toutes celles du dernier.

Quel que soit l'échange de lettres nécessaire pour transformer la permutation α_1 en une quelconque des permutations d'un des s groupes, en α_2 du second, par exemple, cet échange de lettres changera, par hypothèse, la valeur V_1 de V relative à α_1 en la valeur V_2 relative à α_2. Mais, par hypothèse encore, V prend pour β_1 la même valeur V_1, et V_1 relatif à β_1 n'est autre chose que V_1 relatif à α_1, où l'on a changé la notation; donc ce même échange de lettres transformera V_1 relatif à β_1 en V_2 qui sera, d'après l'énoncé du théorème, relatif à une permutation du second groupe, à δ_2 par exemple, nécessairement différente de α_2 : donc cet échange de lettres changera β_1 en δ_2. On ferait voir de même qu'il changerait toutes les autres permutations du premier groupe en toutes les autres du second. Il en serait évidemment de même pour deux quelconques des s groupes du tableau (A).

Si, au contraire, un échange de lettres transformait α_1 du premier groupe, en toute autre du même groupe, en β_1 par exemple, comme V_1 est, par hypothèse, invariable pour toutes les permutations de ce groupe, cet échange de lettres rendrait V_1 invariable. Mais la valeur V_1 peut être considérée comme relative à β_1 ; donc ce même échange de lettres rendant V_1 invariable, et V_1 n'étant invariable que pour les permutations du premier groupe, cet échange de lettres transformerait β_1 en une autre permutation du même groupe, en δ_1 par exemple. On ferait voir de la même manière que ce même échange de lettres changerait δ_1 en une autre permutation du même groupe, et ainsi de suite. Donc, par cet échange, les permutations de ce premier groupe ne font que se transformer les unes dans les autres, que se déplacer. Il en serait de même pour tout autre groupe.

Les deux résultats précédents démontrent évidemment la réciproque.

THÉORÈME III. — *Si une fonction de m lettres prend s valeurs distinctes quand on y permute ces lettres de toutes les manières possibles, le nombre total* μ *des permutations de ces lettres peut être partagé en s groupes composés chacun de q permutations* ($\mu = sq$) *associées de telle manière que, malgré tous les échanges de ces*

lettres, les permutations d'un même groupe ne peuvent jamais se séparer.

Soit V une fonction de m lettres; si s est inférieur à μ, il faut nécessairement que parmi ces μ permutations il y en ait plusieurs α_1, $\beta_1, \ldots, \omega_1$, en nombre q par exemple, qui fassent acquérir une même valeur V_1 à cette fonction. Soient α_2 une des μ permutations qui ne soit pas comprise dans ce premier groupe, et V_2 la valeur que prend V pour cette nouvelle permutation.

Quel que soit l'échange de lettres nécessaire pour transformer α_1 en α_2, ce même échange de lettres transformera les $q-1$ permutations $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \omega_1$ respectivement en $\beta_2, \gamma_2, \ldots, \omega_2$; et je dis que ces dernières sont différentes des premières et font acquérir à V la même valeur V_2. Car l'échange de lettres que l'on considère transforme par hypothèse α_1 en α_2, et la valeur V_1 relative à α_1 en la valeur V_2 relative à α_2. Mais V_1 relative à β_1 n'est autre chose que V_1 relative à α_1, où l'on a changé seulement la notation; donc cet échange de lettres doit nécessairement transformer encore V_1 en V_2; et comme il transforme aussi β_1 en β_2 par hypothèse, la fonction V prend pour β_2 cette valeur V_2. Donc encore, cette permutation β_2 diffère de celles du premier groupe; car si elle coïncidait avec l'une d'elles, elle ferait acquérir à V la valeur V_1.

Ce raisonnement pouvant s'appliquer à toute autre permutation du premier groupe, les q permutations du second groupe $\alpha_2, \gamma_2, \ldots, \omega_2$ sont différentes de celles du premier, et elles font acquérir une même valeur V_2 à la fonction V.

Il y a plus : les q permutations de ce second groupe sont les seules pour lesquelles V prend la valeur V_2. Car si, pour une permutation quelconque δ, différente de celles de ce second groupe, V prenait encore la valeur V_2, il y aurait $q+1$ permutations qui feraient acquérir à V une même valeur V_2; et dès lors il y aurait, en appliquant à V_2 le même raisonnement qui a été fait sur V_1, $q+1$ permutations pour lesquelles V prendrait une même valeur V_1, ce qui est contre l'hypothèse.

Il résulte de là que si $s=2$, on a $\mu = 2q$. Mais si s est supérieur à 2, il y a nécessairement, parmi les μ permutations, une autre permuta-

tion, α_3 par exemple, différente de celles des deux premiers groupes, pour laquelle V prendra une valeur différente V_3 des deux premières V_1 et V_2. Et on démontrerait, de la même manière, que parmi ces μ permutations il y en a nécessairement $q-1$ autres, différentes de celles des deux premiers groupes, pour lesquelles V prend cette même valeur V_3. En sorte que si $s=3$, on a $\mu=3q$. On raisonnerait de la même manière, si s était supérieur à 3.

Donc, quel que soit le nombre s de valeurs distinctes de la fonction V, les μ permutations des m lettres qui entrent dans cette fonction se partagent en s groupes composés chacun d'un même nombre q de permutations, q étant défini par l'équation $\mu=sq$ (ce qui est le théorème de Lagrange); et de plus, d'après le théorème précédent, les permutations de ces s groupes sont *inséparables* pour tous les échanges des m lettres qui les forment.

Théorème IV. — *Réciproquement, si les μ permutations de m lettres sont partagées en s groupes de permutations, inséparables pour tous les échanges de ces lettres, on peut former des fonctions de m lettres qui aient s valeurs distinctes.*

Considérons en effet la fonction linéaire de m lettres $a, b, c, \ldots, l$,

$$v = Aa + Bb + \ldots + Ll,$$

dont les coefficients A, B,..., L sont indépendants les uns des autres. Cette fonction prendra μ valeurs distinctes relatives aux μ permutations de ces lettres $a, b, \ldots, l$. Désignons par $v_1, v_2, \ldots, v_q$ les valeurs qu'elle prend pour les q permutations d'un des groupes du tableau (A), du premier par exemple, et prenons pour la fonction V l'expression symétrique de ces q quantités

$$V = v_1 v_2 \ldots v_q.$$

Je dis que cette fonction V prendra s valeurs distinctes par suite des μ permutations des m lettres $a, b, \ldots, l$ qu'elle renferme. Car, quel que soit l'échange de lettres qui transforme les permutations α_1 et α_2 du tableau (A) l'une dans l'autre, ce même échange de lettres transformera les permutations du premier groupe en celles du second, puisque

les s groupes de ce tableau sont composés de q permutations *inséparables;* et, par suite, ce même échange de lettres transformera v_1, $v_2, \ldots, v_q$ respectivement en $v'_1, v'_2, \ldots, v'_q$, et aussi V en V′ définie par l'équation

$$V' = v'_1 v'_2 \ldots v'_q.$$

Et si l'on avait, comme le fait remarquer Cauchy,

$$V = V',$$

tout système de valeurs de $a, b, \ldots, l$, propres à rendre nul l'un des facteurs de V′, v'_1 par exemple, rendrait V également nul; et, par conséquent, ce système de valeurs devrait annuler l'un de ses facteurs, v par exemple. Donc, si l'on suppose

$$v'_1 = A'a + B'b + \ldots + L'l, \quad v_1 = Aa + Bb + \ldots + Ll,$$

auquel cas les coefficients $A', B', \ldots, L'$ ne sont autre chose que les coefficients $A, B, \ldots, L$ rangés dans un autre ordre, on a l'égalité

$$A' + B' + \ldots + L' = A + B + \ldots + L;$$

et les deux équations

$$v'_1 = 0, \quad v_1 = 0,$$

devant être satisfaites par les mêmes valeurs de $a, b, \ldots, l$, produisent la suite d'égalités

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \ldots = \frac{L'}{L}.$$

Mais de ces dernières et de l'égalité précédente on déduit

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \ldots = \frac{A' + B' + \ldots + L'}{A + B + \ldots + L} = 1;$$

on devrait donc avoir

$$A' = A, \quad B' = B, \ldots, \quad L' = L.$$

ce qui est impossible, puisque c'est par suite d'un échange de lettres que v_1 s'est transformé en v'_1.

Ainsi V' ne peut pas être égal à V. Il en serait de même pour les autres valeurs de V relatives aux autres groupes du tableau (A); donc cette fonction V a s valeurs distinctes.

Remarque. — On peut trouver une infinité de fonctions V dont le nombre de valeurs distinctes est égal à s. Par exemple, si l'on suppose

$$v = a^{A}.b^{B}\ldots l^{L},$$

et si l'on prend

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_q,$$

cette fonction offrira s valeurs distinctes.

Plus généralement, si l'on prend pour V une fonction symétrique de $v_1, v_2, \ldots, v_q$, qui sont les valeurs que prend une fonction quelconque v des m lettres $a, b, \ldots, l$ pour les q permutations du premier groupe du tableau (A),

$$V = F(v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

telle que cette fonction F prenne des valeurs différentes pour une quelconque des permutations de chacun des autres groupes de ce même tableau; cette fonction V aura (théorème I) s valeurs distinctes.

Théorème V. — *Pour avoir tous les nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions quand on y permute les m lettres qu'elles renferment, il faut et il suffit que l'on considère toutes les manières possibles de partager les* μ *permutations qu'offrent ces lettres en* s *groupes composés chacun de* q *permutations,* $\mu = sq$, *associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.*

Car si une fonction quelconque de m lettres a s valeurs distinctes, par suite de tous les échanges possibles de ces lettres, les μ permutations de ces lettres se partagent en s groupes de permutations *inséparables* (théorème III). Réciproquement, si ce partage est effectué,

on peut former de plusieurs manières des fonctions de m lettres dont le nombre de leurs valeurs distinctes soit égal à s (théorème IV).

Donc le théorème est démontré.

Corollaire. — Il résulte de ce théorème que si, par un moyen quelconque, on peut trouver toutes les manières possibles de décomposer les μ permutations de m lettres en s groupes de permutations *inséparables,* on aura trouvé par cela même tous les nombres s de valeurs distinctes que prennent les fonctions de m lettres par suite de tous les échanges de ces lettres.

SUR LA FORME

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme à six variables

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne peut représenter que des entiers pairement pairs ou des entiers impairs $\equiv 1$ (mod. 4); mais pour chaque entier de l'une des deux espèces indiquées il y a des représentations dont on doit désirer de connaître le nombre. L'objet précis du présent article est de donner de ce nombre une expression commode.

Mais faisons d'abord observer que le cas d'un entier pairement pair n'offrait aucune difficulté. Soit

$$2^{\alpha+2}m$$

un tel nombre, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. L'équation

$$2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne peut avoir lieu qu'en prenant x pair. Remplaçons donc x par $2x_1$, et nous la ramènerons à celle-ci

$$2^{\alpha}m = x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2.$$

La valeur demandée de

$$\text{N}(2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est donc égale à celle de

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

qui a été donnée par Jacobi dans ses *Fundamenta nova*. Décomposons m, de toutes les manières possibles, en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués, puis calculons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

que nous représenterons suivant notre habitude par

$$\rho_2(m);$$

nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(2^{\alpha+2} m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) \\ = 4\left[4^{\alpha+1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m). \end{aligned}$$

2. Mais qu'il s'agisse à présent d'un entier impair $m \equiv 1 \pmod{4}$. Il ne suffira plus d'introduire la fonction numérique $\rho_2(m)$ définie plus haut, à moins pourtant que le nombre m ne soit susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Dans le cas général on aura un certain nombre de fois

$$m = i^2 + 4s^2,$$

i étant un entier impair (que nous supposerons positif) et s un entier quelconque, positif, nul ou négatif. Il faudra, d'une part, compter de combien de manières on peut écrire ainsi

$$m = i^2 + 4s^2,$$

ce qu'on fera directement ou au moyen de la fonction $\rho(m)$ définie (sous la condition de $m = d\delta$) comme exprimant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}};$$

on sait en effet que, i étant supposé positif,

$$N(m = i^2 + 4s^2) = \rho(m).$$

Puis, d'un autre côté, il faudra former la somme

$$\sum i^2$$

relative aux diverses valeurs de i. Alors on aura

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m) + 2\sum i^2 - m\rho(m).$$

Nous attachons à cette formule une certaine importance.

3. La formule

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m) + 2\sum i^2 - m\rho(m)$$

est évidemment exacte pour $m = 1$. Vérifions-la sur d'autres exemples.

Elle se simplifie quand m, quoique $\equiv 1 \pmod{4}$, n'est pas décomposable en une somme de deux carrés. On a alors tout simplement

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m).$$

Soit, par exemple,

$$m = 21.$$

Puisque

$$\rho_2(21) = 21^2 - 7^2 - 3^2 + 1 = 384,$$

il faudra que

$$N(21 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 384.$$

On constatera qu'il en est ainsi au moyen des trois identités

$$21 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$21 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$21 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

La première fournit immédiatement soixante-quatre représentations

de l'entier 21 par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

et chacune des deux autres en fournit cent soixante lorsqu'on y effectue les permutations convenables; or

$$64 + 160 + 160 = 384.$$

4. Considérons maintenant le cas particulier d'un nombre premier m, pour lequel l'équation

$$m = a^2 + 4b^2$$

ne pourra avoir lieu que d'une seule manière si les entiers a et b sont supposés positifs. En la comparant à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

on trouvera pour celle-ci deux systèmes de solutions

$$i = a, \quad s = b$$

et

$$i = a, \quad s = -b.$$

De là

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2a^2.$$

Ici, d'ailleurs,

$$\rho_2(m) = m^2 + 1.$$

Dans le cas particulier dont je m'occupe, on a donc

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = (m-1)^2 + 4a^2,$$

résultat assez curieux.

Ainsi on devra avoir

$$\mathrm{N}(5 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 20,$$

ce qui est confirmé par l'identité

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y opérant les permutations convenables.

Pour $m = 13$, d'où $a = 3$, notre formule donne ensuite

$$N(13 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 180.$$

Cela s'accorde avec les identités

$$13 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

Eu égard aux permutations permises, la première conduit à cent soixante représentations de l'entier 13, la seconde à vingt; et

$$160 + 20 = 180.$$

A $m = 17$ répond $a = 1$, d'où

$$N(17 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 260.$$

Cette fois, les identités à employer sont :

$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

En y effectuant les permutations voulues, nous en conclurons respectivement, pour l'entier 17, vingt, cent-soixante, enfin quatre-vingts représentations sous la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

Or

$$20 + 160 + 80 = 260.$$

La vérification cherchée a donc lieu comme toujours.

5. Un autre cas particulier intéressant est celui où l'on prend

$$m = q^2,$$

q étant un nombre premier de la forme $4g+3$. L'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

n'a alors qu'une solution, répondant à

$$i = q, \quad s = 0.$$

De là

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = q^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(q^2) = q^4 - q^2 + 1.$$

Donc, pour tout nombre q premier et de la forme $4g+3$, on a

$$\mathrm{N}(q^2 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = q^4 + 1.$$

Soit, par exemple,

$$q = 3.$$

Notre formule donnera

$$\mathrm{N}(9 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 82,$$

résultat que confirment les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités donne deux représentations de l'entier 9 par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2;$$

la seconde en donne quatre-vingts, en y effectuant les permutations convenables. Or

$$2 + 80 = 82.$$

En prenant $q = 7$, on doit avoir semblablement

$$\mathrm{N}(49 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2402;$$

mais en voilà assez sur tous ces détails.

SUR LA FORME
$x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$\mathrm{N}\,(n = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions que l'équation

$$n = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2$$

comporte en y prenant pour x, y, z, t, u, v des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Cette question se rattache à celle dont nous avons parlé dans l'article précédent. Mettant donc n sous la forme $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ldots$, nous introduirons d'abord la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

ou

$$\rho_2(m),$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. De plus, nous pourrons avoir à considérer les décompositions de m fournies par l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

i étant supposé entier positif, s positif, nul ou négatif; il faudra alors

compter le nombre $\rho(m)$ de ces décompositions et calculer la somme

$$\sum i^2.$$

Mais cela ne sera nécessaire que quand il s'agira de

$$N(4g+1 = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2).$$

Dans les autres cas, la fonction $\rho_2(m)$ suffit.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair m. Cet entier pourra être de la forme $4g+1$ ou de la forme $4g+3$. Or on a évidemment

$$N(4g+3 = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 0.$$

Supposons donc

$$m = 4g+1.$$

Alors on voit sans peine que la valeur de

$$N(m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2)$$

est double de celle de

$$N(m = x^2+4y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2).$$

Dans le cas de $m = 4g+1$, on a donc

$$N(m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 2\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Soit ensuite $\alpha = 1$, en sorte qu'on ait à s'occuper d'un entier impairement pair $2m$. Ce cas est résolu par la formule très-simple

$$N(2m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Enfin, pour le cas d'un entier pairement pair, c'est-à-dire de $\alpha > 1$, l'on a

$$N(2^\alpha m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 4\left[4^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ldots$) par la forme à six variables

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

est facile maintenant. Et d'abord s'il s'agit d'un nombre pair, c'est-à-dire du cas de $\alpha > 0$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne pourra avoir lieu qu'en prenant x pair. Soit donc $x = 2x_1$; en divisant par 2, nous la ramènerons à celle-ci

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + z^2 + 2(x_1^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

qui a été traitée dans le cahier d'août 1864. D'après cela, si l'on désigne comme d'ordinaire par $\rho_2(m)$ la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on aura pour un entier impairement pair

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m),$$

tandis que pour un entier pairement pair, c'est-à-dire pour $\alpha > 1$, la formule sera

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[4^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

2. Le cas d'un entier impair m se subdivise en deux autres, suivant que m est de la forme $4g+1$ ou de la forme $4g+3$.

Quand

$$m = 4g + 3,$$

la fonction $\rho_2(m)$ suffit encore; car je trouve dans cette hypothèse

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m).$$

Par exemple, on doit avoir

$$\mathrm{N}(3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8;$$

or cela est vérifié par les identités

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

puisqu'elles fournissent pour l'entier 3 huit représentations.

De même l'équation

$$\mathrm{N}(7 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 48$$

est vérifiée par l'identité

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

où l'on aura soin d'effectuer les permutations permises.

3. La formule du n° 2 reste exacte même pour un entier $m \equiv 1$ (mod. 4), quand cet entier n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Sinon, il faut une autre formule. En effet, lorsque

$$m = 4g + 1,$$

la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne diffère pas de celle de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

qui a été donnée quelques pages plus haut. C'est ce que l'on prouve sans peine. Il faudra donc considérer dans toute sa généralité, comme à l'endroit que je cite, l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier i est supposé positif, tandis que l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif. On comptera le nombre

$$\rho(m)$$

des solutions de cette équation et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

relative à leur ensemble. Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m) + 2\sum i^2 - m\rho(m).$$

4. La formule que je viens d'écrire pour le cas de

$$m = 4g + 1$$

se simplifie naturellement quand m n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Elle se réduit alors à

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m),$$

comme j'en ai averti d'avance. Ainsi, par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on en conclura qu'on a aussi

$$N(21 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 384.$$

Mais quoiqu'on ait $\rho_2(1) = 1$, on n'a pas

$$N(1 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 1.$$

La vraie valeur est double; et c'est ce que dit la formule du n° 3, eu égard à l'équation $1 = 1^2 + 4.0^2$. De même, pour trouver

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

il ne suffit pas de savoir que $\rho_2(5) = 26$; il faut, en outre, avoir égard aux deux équations

$$5 = 1^2 + 4.1^2$$

et

$$5 = 1^2 + 4(-1)^2,$$

en vertu desquelles on a, pour $m = 5$,

$$\rho(m) = 2,$$

puis

$$\sum i^2 = 2.$$

De là

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 20,$$

résultat exact, comme on peut s'en convaincre au moyen des deux identités

$$5 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités donne huit représentations de l'entier 5; la seconde en fournit douze, parce que l'on peut faire occuper à

$$4(\pm 1)^2$$

trois places distinctes. Or

$$8 + 12 = 20.$$

Ces exemples suffiront.

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

Pour répondre à cette question en parcourant graduellement les divers cas qui peuvent se présenter, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, puis nous introduirons la fonction

$$\rho_2(m)$$

définie comme exprimant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

qui porte sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Le seul cas d'un entier impair $\equiv 1 \pmod{4}$ pourra exiger l'adjonction d'autres fonctions numériques.

2. Le cas d'un entier pairement pair, ou de $\alpha > 1$, est fort simple. En effet, dans l'hypothèse de

$$\alpha > 1,$$

l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne peut avoir lieu que pour des valeurs paires de x, y, z. Il faut donc faire

$$x = 2x_1,\quad y = 2y_1,\quad z = 2z_1,$$

moyennant quoi, en divisant par 4, nous retombons sur l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t^2 + u^2 + v^2$$

traitée par Jacobi. Il suit de là que, dans l'hypothèse indiquée de

$$\alpha > 1,$$

l'on a

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[4^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Le cas d'un entier impairement pair n'est pas plus difficile. On le résout par la formule

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 12\rho_2(m).$$

Quant au cas d'un entier impair m, il se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 4g + 3$$

ou

$$m = 4g + 1.$$

Lorsque

$$m = 4g + 3,$$

on trouve tout de suite

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m).$$

Mais quand

$$m = 4g + 1,$$

la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est un peu plus compliquée.

3. Soit donc désormais

$$m = 4g + 1.$$

Pour obtenir

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

il faudra poser autant de fois qu'on le pourra l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

dans laquelle l'entier impair i est positif, tandis que l'entier s est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. On comptera le nombre

$$\rho\,(m)$$

des décompositions de m ainsi obtenues et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

relative à leur ensemble. Cela fait, on aura

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3\rho_2(m) + 6\sum i^2 - 3m\rho\,(m),$$

équation qu'on établit en prouvant que la valeur demandée de

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est triple de celle de

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2).$$

La formule que je viens de donner se simplifie quand m, quoique $\equiv 1$ (mod. 4), n'est pas décomposable en une somme de deux carrés. Lorsqu'il en est ainsi, elle se réduit à

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3\rho_2\,(m).$$

Par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on peut en conclure que l'on aura

$$N(21 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 1152.$$

Mais quoiqu'on ait $\rho_2(1) = 1$, on n'a pas

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3.$$

La vraie valeur est évidemment double; et c'est ce que dit notre formule générale, eu égard à l'équation $1 = 1^2 + 4.0^2$. De même, pour trouver

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

il ne suffit pas de savoir que $\rho_2(5) = 26$; on a besoin de savoir en outre que, pour $m = 5$,

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2.$$

Notre formule donne en conséquence

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 60,$$

resultat qu'on peut vérifier au moyen des deux identités

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4\,0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y effectuant les permutations qu'elles comportent. La première fournit effectivement vingt-quatre représentations de l'entier 5; la seconde trente-six. Or

$$24 + 36 = 60.$$

On ajoutera, si on le veut, d'autres exemples.

LETTRE DU PRINCE BALTHASAR BONCOMPAGNI A M. LIOUVILLE.

Rome, 11 février 1865.

Monsieur,

Mercredi, 8 du mois courant, j'ai reçu un exemplaire des deux cahiers intitulés : *Journal de Mathématiques pures et appliquées, etc., publié par Joseph Liouville* (octobre et novembre 1864). J'ai vu avec un vif plaisir reproduit dans ces deux cahiers l'opuscule intitulé : *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de trois manuscrits arabes inédits de la Bibliothèque impériale de Paris,* par M. F. Wœpcke; Rome, 1864. Je vous remercie très-vivement de cette reproduction que vous avez eu la bonté de faire, et qui sera lue, je crois, avec plaisir par toutes les personnes qui s'occupent des sciences mathématiques.

Aujourd'hui j'ai fait remettre au bureau de la poste : 1° un pli sous bande, adressé à M. Eugène Janin (3, rue Saint-Hippolyte, parc Guichard, Passy-Paris), et contenant un exemplaire de l'opuscule intitulé : *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de deux manuscrits arabes inédits du* British Museum *de Londres,* par M. F. Wœpcke; Rome, 1864; 2° une lettre adressée à M. Eugène Janin dans laquelle je le prie de vous remettre cet exemplaire. J'ose vous prier de vouloir bien reproduire dans votre savant journal, entièrement ou en partie, cet opuscule. Je vous prie de vouloir bien remarquer :

1° Que dans un passage traduit, dans les pages 4 à 20 de cet opuscule, d'un commentaire de Chihâb Eddîn Aboûl Abbâs Ahmed Ben Radjab, connu sous le nom d'Ibn Almadjdi, mort en l'année 850 de l'hégire, sur le *Talkhys* d'Ibn Albannâ, on trouve une démonstration des formules

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + n]^2,$$
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1),$$
$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2(2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)^2.$$

2° Que dans un passage traduit, dans les pages 24 et 25 de ce même opuscule, d'un ouvrage de Djamchîd Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth (Eddîn) Alqachânî, contemporain d'Ouloug Beg, intitulé : *la Clé du Calcul,* on trouve énoncées et appliquées à des exemples numériques les deux formules suivantes :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2,$$

$$\begin{aligned} 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \Big\{ \tfrac{1}{5} \Big[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n - 1 \Big] & \\ + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \Big\} & \\ \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) & \\ = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n), & \end{aligned}$$

dont la seconde surtout paraîtra être de quelque importance pour le temps dans lequel l'ouvrage ci-dessus mentionné, intitulé : *la Clé du Calcul,* a été composé.

Dans le pli sous bande ci-dessus mentionné se trouve aussi un exemplaire d'une publication intitulée : *le Talkhys d'Ibn Albannâ*, publié et traduit par Aristide Marre, etc.; Rome, 1865. Je vous prie de vouloir bien agréer le petit cadeau que je vous fais de cet exemplaire, et de l'autre exemplaire ci-dessus mentionné de l'opuscule intitulé : *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de deux manuscrits arabes inédits du* British Museum *de Londres,* par F. Wœpcke. Rome, 1864.

Si vous jugez à propos de reproduire, entièrement ou en partie, le *Talkhys,* ou bien d'en faire connaître l'importance dans votre savant journal intitulé : *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* je vous en serai très-reconnaissant; mais je n'ose pas vous le demander, pour ne pas abuser de votre bonté.

Veuillez agréer, Monsieur, les sentiments de considération très-distinguée de

Votre très-dévoué serviteur,

BALTHASAR BONCOMPAGNI.

PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES

EXTRAITS

DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS DU *BRITISH MUSEUM* DE LONDRES,

Cotés nos CCCCXVII et CCCCXIX des manuscrits orientaux (nos 7469 et 7470 des manuscrits additionnels);

PAR M. F. WOEPCKE,

Membre de la Société Orientale allemande, et du Conseil de la Société Asiatique de Paris, et Membre correspondant de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*.

Manuscrit coté CCCCXVII *des manuscrits orientaux du* British Museum (7469 *des manuscrits additionnels*).

Volume in-4 de 210 feuillets en papier. Le premier et le dernier de ces 210 feuillets, qui sont des feuillets de garde, et les trois feuillets qui précèdent le dernier feuillet de garde ne sont pas numérotés. Les 205 autres feuillets sont numérotés au crayon avec les numéros 1 à 204, à l'exception du trentième feuillet du volume, qui paraît avoir été sauté par inadvertance.

Les quatre feuillets qui précèdent le dernier feuillet de garde sont en blanc, ou occupés par des notes détachées.

Tout le reste du manuscrit est occupé par le commentaire de Chihâb Eddîn Aboûl Abbâs Ahmed Ben Radjab, connu sous le nom d'Ibn Almadjdî, le châféïte, sur le *Talkhîs* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ. La copie est datée du 17 Rabîa' second de l'an 840 de l'hégire, ou 29 octobre 1436 de J.-C.; et l'achèvement du commentaire du 6 Dzoûl-hidjdjah de l'an 834 de l'hégire, ou 15 août 1431 de J.-C.

Le commentateur Ahmed Ibn Almadjdi mourut en 850 de l'hégire (29 mars 1446 à 18 mars 1447 de J.-C.), et est mentionné dans le Dictionnaire bibliographique de Hadji Khalfa comme auteur de plusieurs ouvrages concernant l'astronomie et le calcul astronomique. Voir l'édition de Fluegel, t. I, p. 248, n° 475; t. II, p. 581, n° 3990; t. III, p. 223, n° 5111 et p. 528, n° 6773; t. V, p. 205, n° 10694. Comparer Wœpcke, sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident, p. 66, lig. 22 et suiv.; et Bibl. Bodleianae codd. mss. orientall. catalogi partis secondæ vol. I, confecit A. Nicoll, Oxonii, 1821; in-folio, p. 284, n° CCLXXXVI, 1°.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 83 à 110 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon et mentionnée ci-dessus.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. O Dieu bénis notre sei- F. 1, r°.
gneur Mohammed, sa famille et ses compagnons, et répands sur eux ton salut.

Le pauvre qui a besoin de la miséricorde de son Seigneur, qui confesse son insuffisance dans l'accomplissement de ses devoirs et ses péchés, qui espère le pardon de Dieu qui ressuscite et qui crée, Ahmed le châféïte Ibn Almadjdî dit :

Louange à Dieu qui a réuni [1] les savants dans les habitations [2] de la dignité seigneuriale, et qui a fait tomber [3] sur eux, dans la distribution [4] des qualités excellentes [5], le lot [6] de la bonne fortune; qui a soulevé [7] de leurs cœurs le rideau [8], et qui les a comblés de bienfaits innombrables [9]; qui leur a fait connaître les essences des noms [10] et les qualités inhérentes et inséparables [11], de sorte qu'ils ont découvert les choses inconnues [12], et qu'ils ont appris la signification des mots.

Je loue Dieu parce qu'il a revêtu [13] les savants des robes d'honneur

---

[1] Cette préface, écrite en prose rimée, est remplie de jeux de mots dans le goût arabe, l'auteur ayant eu soin d'employer des mots qui ont en même temps des significations techniques dans l'arithmétique pratique ou dans d'autres parties des sciences mathématiques. Ainsi le mot traduit ici par « réunir » signifie en même temps, comme terme technique « additionner ».

[2] Ce mot signifie en même temps les « places » ou « rangs » de chiffres dans la numération, et en astronomie les « mansions » de la lune.

[3] Le mot traduit ici par « faire tomber » signifie aussi « multiplier ».

[4] Ce mot signifie en même temps « division ».

[5] Le mot traduit par « qualités excellentes » signifie en même temps « excès », et de là « différence ».

[6] Ce mot signifie en même temps « flèche » et « sinus verse », et en outre dans les calculs relatifs à des sociétés de commerçants, etc., « portions ».

[7] Le mot qui signifie « soulever » est souvent aussi employé en arithmétique pratique pour désigner le « montant » qui « résulte » d'une opération.

[8] « Le soulèvement du rideau » est en même temps le titre d'un célèbre traité d'Ibn Albannâ sur l'arithmétique pratique.

[9] Textuellement : ce qui n'est pas dans le « calcul ».

[10] Ces mots contiennent une allusion évidente aux termes techniques qui désignent les quantités irrationnelles appelées « de deux noms » et « de plusieurs noms ».

[11] Allusion à la quantité « continue » et « discrète ».

[12] Allusion à la détermination des valeurs des inconnues en algèbre.

[13] Le verbe traduit par « revêtir », textuellement « jeter sur », est, sans la préposition « sur », le terme technique qui désigne « la soustraction ».

de la perfection, et les a ornés des colliers [1] de la gloire. Je le remercie de les avoir préservés des deux (espèces d') erreurs [2] dans l'action d'effacer [3] et dans l'action d'écrire, de sorte que les plateaux [4] de leurs balances [5] ont penché en leur faveur.

Je témoigne qu'il n'y a pas d'autre Dieu que Dieu seul, et qu'il n'a point de compagnon, Lui qui est un, unique, simple [6], éternel, inaccessible au nombre, qui n'a point d'épouse [7] ni de fils.

Je témoigne que notre seigneur Mohammed est son serviteur et son prophète, son élu et son ami, l'imâm des imâms auquel Dieu a inspiré les paroles de la sagesse, le possesseur de la noble origine [8] et de la destinée [9] élevée et sublime, de la place [10] qui est l'objet des louanges, et du réservoir [11] du nectar céleste célébré par toutes les langues: qui est initié au vaste ensemble et aux détails [12] de la science, et qui juge avec pénétration de l'excellence des offrandes [13], de sorte qu'il confère les grâces, petites et grandes; qui a été transporté dans

---

[1] Ce mot signifie aussi les « nœuds » des nombres, c'est-à-dire les neuf unités, les neuf dizaines (10, 20, 30, etc.), les neuf centaines, et ainsi de suite.

[2] Allusion au « calcul des deux erreurs », c'est-à-dire à la règle des deux fausses positions.

[3] Allusion à une certaine manière de calculer sur le sable dans laquelle on efface successivement avec le doigt les chiffres que l'on vient d'écrire, pour les remplacer par d'autres, jusqu'à ce qu'on arrive au résultat.

[4] Allusion à un autre nom de la règle des deux fausses positions.

[5] Le mot qui signifie « balance » est aussi le terme technique employé pour désigner la « preuve », par exemple la preuve par neuf, par sept, etc.

[6] Ce mot signifie en même temps « impair ».

[7] Ce mot signifie en même temps « pair ».

[8] Le mot traduit par « origine » signifie, comme terme technique, le « rapport » de deux quantités.

[9] Ce mot signifie en même temps la « division ».

[10] Ce mot signifie en même temps le « dénominateur » d'une fraction.

[11] Ce mot désigne en même temps une certaine partie de la constellation de la Grande Ourse.

[12] Textuellement : au « beaucoup » et au « peu ».

[13] Dans cette phrase le texte du manuscrit paraît être altéré. Le mot traduit par « offrandes » sert à désigner en arithmétique des calculs « d'approximation » et en général des « procédés expeditifs ».

l'apogée de la noblesse aux cercles du plus haut des paradis célestes; dans la main duquel les pierres muettes [1] ont loué Dieu, et qui est l'etre pur chargé de la défense de la foi. Puisse Dieu répandre sur lui, sur sa famille et sur ses compagnons toutes les bénédictions possibles, le salut, la noblesse, l'honneur et la grandeur.

Pour en venir au fait. Attendu qu'aucun blâme [2] ne s'attache à la science du calcul, et qu'elle n'est resserrée par aucune barrière [3], j'ai choisi, dans cette science, comme objet d'une étude particulière, l'ouvrage intitulé « l'Exposé fait avec choix » (*Talkhîs*), ouvrage complet en fait de théorie, composé par le chaïkh, l'imâm, Aboûl Abbas Ahmed Ibn Albannâ, puisse Dieu couvrir ses péchés de sa miséricorde et le faire demeurer au milieu de son paradis. Cependant j'ai remarqué que cet ouvrage contient des opérations privées de leur partie la plus instructive, en tant qu'elles ne sont pas accompagnées, dans les chapitres qui en traitent (d'un exemple ou d'un problème) correspondant; et qu'il contient des théories subtiles dont il est impossible d'exposer d'une manière satisfaisante les significations, quand même on y apporterait un soin extrême dans quelques feuillets d'un mince volume, quoique certainement remplis d'une science abondante, si ce n'est que l'auteur n'y a point entrepris l'explication de ces belles opérations. Au contraire, il les a laissées destituées de démonstrations, de sorte que nous ne savons pas si la justesse de ce que l'auteur avance est nécessaire ou accidentelle, et si, en nous conformant à ce qu'il expose, nous pouvons arriver à ce que nous désirons savoir en dehors de cela.

Par conséquent j'ai jugé convenable d'écrire sur cet ouvrage un com-

---

[1] Le mot traduit par « muettes » désigne en même temps les quantités « irrationnelles », et, parmi les nombres entiers, les nombres « premiers », eu égard à leur propriété de ne pas se laisser decomposer en facteurs. Comparer le *Liber Abbaci* de Leonard de Pise, édition du prince don Balthazar Boncompagni, Rome, 1857; in-4, p. 31, le tableau placé sur la marge de la page. Le mot « hasam » y est la reproduction, un peu modifiée, du mot arabe qui signifie « muet ».

[2] Littéralement : « poussière ». Ce mot contient en même temps une allusion au calcul du *gobâr*, ou calcul de poussière.

[3] Le mot arabe traduit par « barrière » est *hiçâr* et paraît contenir une allusion à un célèbre traité d'arithmétique, antérieur à Ibn Albannâ et intitule : « *Al-hiçârou' l-çaghîr* ».

mentaire qui contînt l'explication des principes sur lesquels il est fondé, l'exposé clair et exact de ses parties compliquées, et qui écartât l'obscurité qui cache [1] les objets qu'il a en vue ; de réunir, au moyen de ce commentaire, ce qui se trouve dispersé dans l'ouvrage original, et de rassembler les joyaux précieux qu'il renferme ; d'éclaircir enfin les méthodes de ses opérations et les démonstrations de ses problèmes.

J'ai donc essayé [2] mes forces en consignant dans cet ouvrage ce qui est dans les limites du possible, et c'est à l'épreuve [3] que l'on reconnaît la valeur du caillou ou qu'on le juge méprisable ; j'ai dirigé [4] vers cet objet le cœur [5] de ma pensée en lui donnant du développement [6], et j'y ai mis ma confiance dans le changement [7].

Dieu a eu égard à ma contrition [8] ; il m'a récompensé en me réconfortant [9], et il m'a aidé à composer, à écrire et à rédiger cet ouvrage.

---

[1] Littéralement : (qui contînt) « l'action d'écarter le manteau » *qachfou'l kinâ'*. Ces mots renferment peut-être une allusion à un traité du célèbre Nacôr Eddin Althôuci, intitulé *Qachfou' l-kinâ'* et relatif à un sujet appartenant à la trigonométrie sphérique. *Voir* Hadji Khalfa, édition de Fluegel, t. V, p. 212 et 213, n° 10738. Comparer *ibidem* n° 10742.

[2] Ce mot est employé quelquefois comme expression technique pour désigner l'action de « faire la preuve » d'une opération arithmétique.

[3] Ce mot sert en même temps comme terme technique pour désigner la « vérification » d'une opération arithmétique.

[4] Le mot traduit par « diriger » sert, comme terme technique, à désigner l'action de « transformer » une fraction donnée dans une autre dont le dénominateur est donné.

[5] Le mot traduit par « cœur » se change, par une légère modification des points-voyelles, dans le terme technique qui signifie « zéro ».

[6] Le mot traduit par « développement » signifie en même temps le « numérateur total » que l'on obtient en réduisant un nombre mixte, ou certaines autres espèces compliquées de fractions, en usage chez les Arabes, à une fraction ordinaire.

[7] C'est-à-dire : au milieu des vicissitudes des choses humaines. Ce mot paraît contenir une allusion à un terme technique formé de la même racine et qui désigne la « transformation » des équations algébriques.

[8] Ce mot signifie, comme terme technique, « fraction ».

[9] Les deux mots traduits par « récompenser » et « réconforter » désignent en même temps les deux opérations algébriques de l' « opposition » et de la « restauration » dont la réunion forme le nom arabe de l'algèbre.

J'ai intitulé cet ouvrage « Le recueil de la moelle et le commentaire de l'exposé des opérations du calcul ».

Dans sa rédaction je me suis fait une loi de commencer (constamment) par mentionner littéralement les paroles de l'auteur, telles qu'il les a consignées dans sa composition. Ensuite je les ai fait suivre d'une explication au moyen d'exemples, et enfin j'ai placé en dernier lieu la démonstration et l'indication des causes, afin que (chaque théorie) soit complète et absolue dans son chapitre et présentée d'une manière claire et spéciale en faveur de ceux qui désirent s'en instruire. J'ai indiqué les paroles de l'auteur au moyen des mots « l'auteur dit telle chose » et au moyen de l'encre rouge, de manière à les distinguer du commentaire et de les mettre à part. Quelquefois aussi j'ai cité des passages de ce que l'auteur a exposé dans (l'ouvrage intitulé) « le Soulèvement du Rideau. » Dans ces cas je dirai « il a dit », de sorte qu'il n'y a lieu à aucune ambiguïté.

Fin du f. 1, v°. Cependant je n'ai pas violé la virginité de sa méthode | et je ne me suis pas frauduleusement approprié les choses admirables qui lui appartiennent [1], comme on abuse d'un homme simple, mais j'ai étudié ce que les anciens ont mentionné en fait des principes de cette branche de la science, et ce qu'ils ont expliqué.

... Il est connu que si l'on ajoute un nombre quelconque au nombre qui le suit, le résultat est le double du premier nombre plus un. Il est connu aussi que l'unité est égale à trois fois un tiers | et que le double d'un nombre quelconque est égal à trois fois deux tiers de ce nombre. Par conséquent la somme d'un nombre quelconque et de celui qui le suit est égale à trois fois deux tiers de ce nombre plus un tiers de l'unité [2]. Donc, si nous multiplions le double de la somme [3] par le dénominateur des deux nombres, on a multiplié par le triple de ce qu'il fallait. Il est connu aussi, que si l'on multiplie le double d'un nombre par le triple d'un autre nombre, le résultat est égal a six fois

F. 17, v°.

[1] Ces mots signifient en même temps : je n'ai rien dérobé à mon hôte.

[2] $$a + (a+1) = 3\left(\frac{2a}{3} + \frac{1}{3}\right).$$

[3] C'est-à dire
$$2(1+2+3+\ldots+n) \quad \text{ou} \quad n(n+1).$$

le résultat de la multiplication de l'un des deux nombres par l'autre.

L'auteur dit : *et l'élévation au cube (se fait) par l'élévation au carré de la somme* [1]. C'est-à-dire que la somme des cubes des nombres suivant leur ordre résulte de la multiplication de la somme des côtés par elle-même. F. 17, v°, lig. 3.

La raison de cela, c'est que, si un nombre quelconque est partagé en deux parties, la somme du produit de la multiplication du nombre par l'une de ses deux parties, plus le rectangle des deux parties et le carré de l'autre partie est égale au carré de ce nombre [2].

En effet, le principe de la multiplication d'un nombre par un autre nombre consiste en ce que nous multiplions le tout de l'un des deux

---

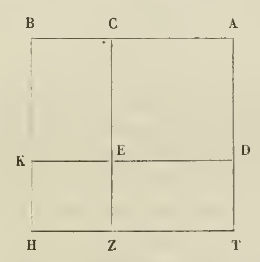
[1] C'est-à-dire

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + n]^2.$$

[2] $$(a + b)a + ab + b^2 = (a + b)^2.$$

On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose évidemment destinée à remplacer l'alinéa suivant, et dont voici la traduction.

J'ai trouvé dans un autre exemplaire, portant l'écriture de l'auteur, une autre explication, à savoir la suivante. *Exemple :* Soit le nombre AB divisé en deux parties au



point C, et soit la surface AH le carré de AB. Menons du point C une droite parallèlement à AT, ce sera la droite CZ, et prenons sur AT un segment équivalent à AC, à savoir AD ; enfin menons la droite DE parallèlement à AB. Alors puisque la surface AK résulte de la multiplication de AB par AD, c'est-à-dire par AC; puisque la surface DZ résulte de la multiplication de DE, c'est-à-dire de AC, par EZ, c'est-à-dire par EK, c'est-à-dire par CB ; et puisque la surface EH résulte de la multiplication de EZ par lui-même, c'est-à-dire de BC par lui-même ; il s'ensuit ce que nous nous étions proposé de démontrer. Cela étant établi, nous disons.

nombres par le tout de l'autre. Donc, si l'on divise l'un des deux nombres, ou tous les deux, dans un nombre quelconque de parties, il est nécessaire de multiplier chaque partie de l'un des deux nombres par toutes les parties de l'autre, et d'additionner les résultats. C'est par là aussi que l'on reconnaît la raison de la multiplication suivant les rangs (des chiffres des nombres), parce que chacun des deux nombres multipliés l'un par l'autre peut être décomposé dans ses rangs [1], ainsi que vous le lirez certainement, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le chapitre de la multiplication.

Cela étant établi, nous disons que, si un nombre quelconque est divisé en deux parties de quelque manière que ce soit, son carré est égal aux deux carrés de ses deux parties et à leur rectangle pris deux fois.

Soit donc le nombre A divisé en deux parties d'une manière quelconque, et que ce soient B, C. Je dis que le carré de A est égal à la somme des deux carrés de B et C et de leur rectangle pris deux fois.

En effet, A étant divisé en B et C il faut que nous multipliions chacune de ces deux parties par chacune des deux parties de A. Donc posez-les deux fois sur deux rangs, comme il suit :

B C
B C

Nous multiplions B par B, et ensuite par C ; puis C par B, et ensuite par C, et nous additionnons les quatre résultats. Mais le produit de B par B est le carré de B ; et pareillement C fois C est le carré de C ; et le produit de B fois C et de C fois B est le rectangle B fois C pris deux fois. Par conséquent le carré de A est égal à la somme des carrés de ses deux parties et de leur rectangle pris deux fois.

Il est, par là, évident que le produit de A tout entier par B est égal au carré de B plus le rectangle de B fois C, et que le produit de A tout entier par C est égal au carré de C plus le rectangle de C fois B.

Donc, si l'on multiplie un nombre par l'une de ses deux parties, et

---

[1] Par exemple

$$3856 = 3000 + 800 + 50 + 6.$$

si l'on joint au résultat le carré de la partie qui n'a pas servi à la multiplication et le rectangle des deux parties, cela est égal au carré du nombre.

Cela étant établi, nous disons qu'il est connu que le cube d'un nombre est le résultat de la multiplication du nombre par son carré. Donc étant donnés des nombres suivant leur ordre et dont le premier soit l'unité, si nous désirons trouver la somme de leurs cubes, vous multiplierez chacun de ces nombres par son carré et vous additionnerez les résultats. Il résultera la quantité cherchée [1].

Mais le carré d'un nombre quelconque est la somme de son triangle et du triangle du nombre précédent [2], ainsi que nous expliquerons cela certainement ci-après. Et le triangle d'un nombre quelconque est égal à la somme de ce nombre plus le triangle du nombre précédent [3], ainsi qu'il sera pareillement expliqué.

D'après cela, si nous désirons trouver la somme des cubes des nombres suivant leur ordre, et dont le premier soit, par exemple, l'unité, vous multiplierez chacun de ces nombres par son triangle du nombre précédent et vous additionnerez les résultats. Il résultera de la quantité cherchée [4].

Soient, par exemple, quatre nombres, dont le premier soit l'unité et le dernier quatre. Nous désirons trouver la somme de leurs cubes. Nous les posons donc dans une ligne, comme ci-après, et au-dessous

---

[1] $$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=1.1^2+2.2^2+3.3^3 \\ +4.4^2+\ldots+(n-1).(n-1)^3+n.n^2.$$

[2] $$n^2=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}.$$

[3] $$\frac{n(n+1)}{2}=n+\frac{(n-1)n}{2}.$$

[4] $$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=1.(0+1)+2.(1+3)+3(3+6) \\ +4(6+10)+\ldots+(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right] \\ +n\left[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

leurs triangles dans une autre ligne, comme vous le voyez :

1	2	3	4
1	3	6	10

il faut alors que nous multipliions le quatre par le dix qui se trouve au-dessous, et par le six qui est au-dessous du nombre précédent. Puis vous multipliez le trois par le six, et ensuite par le trois ; et pareillement le deux par le trois et ensuite par le un. Puis le un par le un. Vous additionnerez les résultats et il résultera la somme des cubes de ces nombres.

Mais le résultat de l'addition de ces produits est précisément égal au résultat de la multiplication du triangle du plus grand de ces nombres par lui-même, c'est-à-dire de la somme de ces nombres par elle-même [1].

La raison de cela c'est que le triangle du plus grand de ces nombres, à savoir dix, se partage en deux parties, quatre et six, c'est-à-dire son
F. 18, r°. côté et le triangle précédent. Donc, si vous multipliez le dix | par le quatre et le quatre par le six cela revient à former le produit d'un nombre par une de ses deux parties et le rectangle des deux parties. Si donc on ajoute à cela le carré de l'autre partie, il résulte le carré de ce nombre. Mais l'autre partie, c'est six. Et il a été déjà démontré que le carré du six est égal au produit du six par l'une de ses deux parties plus le rectangle de ses deux parties et plus l'autre partie, c'est-à-dire égal au produit du six par le côté trois, plus le produit du côté trois par le triangle trois qui est le triangle précédent, et en joignant cela encore au carré de l'autre partie, à savoir de trois, parce que le six a été divisé en trois et trois. Mais le carré du trois est égal au produit du trois par le côté deux qui est l'une de ses deux parties, plus le rec-

---

[1]
$$1.(0+1)+2.(1+3)+3.(3+6)+4.(6+10)+\ldots$$
$$+(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right]+n\left[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=[1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n]^2.$$

tangle des deux parties, c'est-à-dire du côté deux multiplié par le triangle un, et plus le carré de l'un. Mais le carré de l'un c'est un.

Il est donc rendu évident, par là, que si l'on multiplie chacun de ces nombres par son triangle et par le triangle du nombre précédent, la somme des résultats est égale au produit de la somme de ces nombres par elle-même et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer [1].

---

[1] Cette démonstration d'Ibn Almadjdî s'exprime de la manière suivante en langage algébrique moderne :

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3 = 1.1^2+2.2^2+3.3^2+4.4^2+\ldots$$
$$+(n-1)(n-2)^2+n.n^2 = 1.(0+1)+2.(1+3)+3(3+6)+4(6+10)+\ldots$$
$$+(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right]+n\left[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right]$$
$$=1^2+2[1+(2+1)]+3[3+(3+3)]+4[6+(4+6)]+\ldots$$
$$+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]\right\}$$
$$+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\left[n+\frac{(n-1)n}{2}\right]\right\}.$$

Mais on a

$$1^2+2[1+(2+1)]=1^2+2.1+2.(2+1)=(2+1)^2=3^2,$$
$$3^2+3[3+(3+3)]=3^2+3.3+3.(3+3)=(3+3)^2=6^2,$$
$$6^2+4[6+(4+6)]=6^2+4.6+4.(4+6)=(4+6)^2=10^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]\right\}$$
$$=\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2+(n-1)\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(n-1)$$
$$+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]=\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2,$$
$$\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\left[n+\frac{(n-1)n}{2}\right]\right\}$$
$$=\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2+n\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n\cdot\left[n+\frac{(n-1)n}{2}=n+\frac{(n-1)n}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.*

Il a été dit précédemment, parmi les propriétés des nombres (naturels) rangés suivant leur ordre, que les unités du plus grand, c'est-à-dire de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, sont égales au nombre (des termes de la suite). Or, il en serait de même pour le plus grand des nombres impairs rangés suivant leur ordre, si les nombres pairs étaient intercalés parmi les impairs. Il est connu aussi que le nombre des nombres pairs qui tombent entre ces nombres impairs, est plus petit d'une unité que le nombre des impairs; et si de deux nombres quelconques l'un dépasse l'autre d'une unité, leur somme est le double du plus grand moins l'unité, ou le double du plus petit plus l'unité. D'après cela le (nombre) jusqu'auquel (la suite) des impairs s'étend, est le double du nombre de ces impairs moins l'unité.

Il a été déjà montré, dans la détermination de la somme de la proportion arithmétique, qu'il fallait additionner les deux termes extrêmes et multiplier cela par la moitié du nombre (des termes). Mais (le terme) le plus petit est (ici) l'unité. Lors donc qu'il est ajouté au plus grand, il résulte le double du nombre des nombres. Et il faut que nous multipliions par la moitié du nombre des nombres impairs, c'est-à-dire par un quart de la somme des deux termes extrêmes. Nous multiplierons donc la somme des deux termes extrêmes par son quart. Mais le produit d'un nombre par son quart est égal au produit de sa moitié par sa moitié, ainsi que nous expliquerons cela certainement.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.*

Il faut faire précéder ce problème de deux principes.

L'un d'eux c'est qu'il faut que vous sachiez que la somme des nom-

---

Donc

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$= [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n]^2.$$

bres suivant leur ordre depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, s'appelle le triangle de ce nombre.

Soient pris, par exemple, les nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'au six, et soient (écrits) au-dessous leurs triangles depuis un jusqu'à vingt et un, et leurs carrés depuis un jusqu'à trente-six, ainsi que le montre la figure suivante :

1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	9	16	25	36

Il a été déjà expliqué, dans ce qui précède, que le carré d'un nombre quelconque est égal à son triangle plus le triangle du nombre précédent.

En vertu de cela [1] on peut dire que les triangles des nombres pris suivant leur ordre jusqu'à un nombre impair sont égaux aux carrés des nombres impairs suivant l'ordre pris jusqu'au même nombre impair; et que les triangles des nombres suivant l'ordre pris jusqu'à un nombre pair, sont égaux aux carrés des nombres pairs, suivant l'ordre pris jusqu'au même nombre pair. Et certainement l'explication de la signification du triangle se présentera lorsqu'il sera question des nombres figurés, si Dieu le Très-Haut le permet.

Le second (principe) c'est que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de leur produit lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une quantité quelconque tandis que l'autre a été diminué proportionnellement.

Pour effectuer l'objet que ce principe a en vue il y a deux méthodes.

---

[1] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction.

Dans un autre exemplaire (on lit :) En vertu de cela la somme des carrés des nombres impairs suivant leur ordre ou des nombres pairs suivant leur ordre est la somme des triangles des nombres suivant leur ordre pris jusqu'à ce nombre déterminé; car le carré de l'unité est égal à son triangle, parce qu'il n'est précédé de rien; et le carré du trois est égal à son triangle plus le triangle du nombre pair précédent; et pareillement le carré de deux est égal à son triangle plus le triangle du nombre impair précédent. Et ainsi de suite d'après le même ordre. Et certainement la signification du triangle sera expliquée lorsqu'il sera question des nombres figurés, si Dieu le Très-Haut le permet.

Le second (principe) c'est que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce

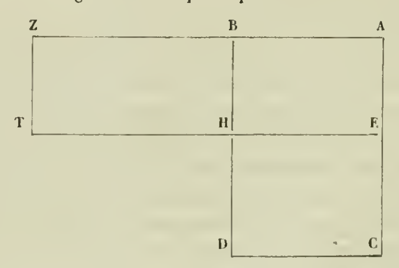
L'une consiste à diviser l'un des deux facteurs par un certain nombre, et à multiplier l'autre facteur par ce même nombre [1].

L'autre méthode consiste à retrancher de l'un des deux facteurs une quantité arbitraire, à prendre le rapport de la partie retranchée à la partie restante et à ajouter à l'autre facteur une quantité proportionnelle à ce rapport [2].

---

qui résulte de leur produit, lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une quantité quelconque, tandis que l'autre a été diminué proportionnellement.

Exemple. Soit le rectangle AD formé par le produit de AB fois AC, et soit ensuite



AC divisé au point E. Que l'on prolonge AB de BZ; et soit CE à EA comme BZ à AB, c'est-à-dire la partie retranchée à ce qui reste comme la partie ajoutée à la ligne à laquelle elle est ajoutée; enfin complétons le rectangle AT. Je dis que les deux rectangles AD, AT sont égaux. La raison de cela c'est que CE est à EA, c'est-à-dire DH à HB, comme BZ à AB, c'est-à-dire comme HT à HE. Or, le rectangle ED est formé du produit du premier par le quatrième (terme), qui sont DH, HE; et le rectangle BT est formé du produit du second par le troisième (terme) qui sont HB, HT. Par conséquent les deux rectangles ED, BT sont égaux, d'après ce qui a été dit précédemment. Ensuite ajoutons le rectangle AH comme partie commune à chacun des deux rectangles. Alors les deux rectangles AD, AT seront égaux. Et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

[1] $$a.b = \left(\frac{a}{m}\right)\cdot(b.m).$$

[2] Si l'on fait

$$\frac{m}{a-m} = \frac{n}{b},$$

on aura

$$a.b = (a-m)(b+n).$$

Exemple. Soit l'un des deux facteurs six et l'autre huit. Ce qui résulte de la multiplication de l'un par l'autre est quarante-huit. Or, si vous divisez le six, par exemple par deux, il résulte trois; et si vous multipliez le huit par le deux, il résulte seize. Alors ce qui résulte | F. 18, v°.
de (la multiplication) de trois par seize est quarante-huit.

Et si vous retranchez du six par exemple trois, le rapport de cela au reste, à savoir à trois, est celui de l'égalité; ajoutant par conséquent au huit son équivalent il résulte seize. Alors le résultat de la multiplication de trois par seize est quarante-huit, comme d'abord.

Et si vous retranchez du six deux, le rapport de cela au reste, à savoir au quatre, est la moitié; ajoutant donc au huit l'équivalent de sa moitié, il résulte douze. Alors le résultat de la multiplication de quatre par douze est pareillement quarante-huit.

La cause de cela, etc.

... Mais il a été déjà expliqué, dans le second principe, que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de (la multiplication de) ces deux nombres lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une certaine quantité, tandis qu'elle a été retranchée de l'autre proportionnellement, non suivant sa grandeur absolue. Par conséquent un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend étant les deux côtés d'un rectangle, si l'on augmente le premier de deux fois sa propre valeur, de sorte que l'on obtient le troisième (nombre) | à F. 19, v°.
partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, exactement, et si l'on diminue l'autre suivant la même proportion, de sorte qu'il est réduit à un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, parce que le tiers est au tout comme le sixième à la moitié; alors on est ramené à trois côtés dont l'un est le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, l'autre le second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et le dernier un sixième du (nombre) jusqu'auquel la suite s'étend. On multiplie donc le premier par le second, et ce qui résulte par le troisième.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication* F. 19, v°, lig. 3.
de la somme par son double moins un [1]. L'explication de ce problème

[1] C'est-à-dire $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (24 - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

est conforme à l'explication de l'addition des cubes des nombres pairs suivant leur ordre. Nous la différerons donc jusque-là; et par là sera expliqué ce qui vient d'être mentionné.

F. 19, v°, lig. 5. L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.*

Attendu que le nombre des nombres (naturels) suivant l'ordre est égal au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, mais que, entre les nombres pairs pris suivant l'ordre, manquent les impairs pris suivant l'ordre, dont le nombre est égal au nombre des pairs, parce que le premier des pairs est deux qui est précédé par l'unité; il s'ensuit que, dans les nombres pairs, le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est égal au double du nombre (des nombres). L'addition des deux termes extrêmes consiste donc à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux, parce que c'est le premier des pairs. Par conséquent on multiplie deux plus (le nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre des pairs, c'est-à-dire par un quart du double de ce nombre, ou par un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Mais le produit des deux termes extrêmes par un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est égal au produit de la moitié de la somme des deux termes extrêmes par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, en vertu de ce qui a été expliqué dans le second principe. Dieu seul connaît la vérité.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples); ou par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.*

L'auteur mentionne ici deux méthodes pour trouver (la somme) des carrés des nombres pairs. La seconde est celle qui a été donnée déjà précédemment pour trouver (la somme) des carrés des nombres impairs. En effet, il a été expliqué, à l'occasion du premier principe, que les carrés des nombres impairs ou des nombres pairs (additionnés) sui-

vant leur ordre sont égaux aux triangles des nombres (naturels additionnés) suivant leur ordre jusqu'au même nombre impair ou (jusqu'au même nombre) pair; et que, si ces triangles sont divisés par la somme de leurs côtés, il résulte des (quotients) qui se dépassent mutuellement d'un tiers [1]. L'opération revient donc à ceci, que la quantité cherchée soit décomposée en trois côtés, à savoir la moitié (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, le second (nombre) à partir de ce (nombre) et un tiers du troisième (nombre) à partir de ce (même nombre), ainsi que tout cela a été expliqué à l'occasion des carrés des nombres impairs. Il n'y a, à cet égard, aucune différence entre la sommation des impairs et des pairs. Enfin le produit de la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend par un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, est égal au produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, tout entier, par un sixième (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Or cela, c'est exactement la méthode pour l'addition des carrés des nombres impairs.

Quant à la première méthode, elle consiste à multiplier un tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité par la somme, c'est-à-dire par la somme des nombres pairs pris suivant l'ordre. Il a été déjà expliqué, dans ce qui précède, que, si on multiplie les uns par les autres les trois côtés, à savoir la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, le second (nombre) à partir de ce (nombre) et un tiers du troisième (nombre) à partir de ce (même nombre), il résulte la quantité cherchée ainsi qu'il a été dit. Mais le produit du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, est égal au produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, tout entier, par un tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, en vertu de

[1] C'est-à-dire

$$\frac{1+3+6+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}{1+2+3+\ldots+(n-1)+n}-\frac{1+3+6+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}}{1+2+3+\ldots+(n-1)}=\frac{1}{3}.$$

ce que vous savez. Si ensuite ce qui résulte (est multiplié) par la moitié (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, il résulte la même chose que d'abord. Mais si vous multipliez le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, alors il faudra multiplier le résultat par un quart du nombre [1]. (Le produit qu'il s'agit de former) est donc décomposé dans le produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui résulte (devant être multiplié) par un quart du nombre. Mais un quart du nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre est égal à la moitié du nombre des nombres pairs suivant leur ordre; car il manque au nombre (des nombres naturels) des nombres impairs en quantité égale à ces nombres pairs, ainsi qu'il a été dit. La quantité cherchée est donc un rectangle [2] (formé) de trois côtés dont l'un est le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, l'autre deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et le dernier la moitié du nombre des nombres pairs pris sui-
F. 20, r°. vant l'ordre. Or, par quelque de ces (trois côtés) | que vous commenciez, c'est permis. Multipliez donc, par exemple le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par la moitié du nombre des nombres pairs; et que ce qui résulte soit multiplié par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend [3]. Mais le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend dépasse celui jusqu'auquel (la suite) s'étend constamment de deux. Lors donc que nous multiplions ce nombre par la moitié du nombre (des nombres pairs), c'est comme si nous avions additionné les deux termes extrêmes et que nous eussions multiplié la somme par la moitié du nombre (des nombres pairs).

---

[1] $$(2n+2)\cdot\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{2n}{2}=(2n+2)\cdot\frac{2}{3}(2n+1)\cdot\frac{2n}{4}.$$

[2] *Sic.* On se serait attendu à ce que l'auteur dît : « un solide ».

[3] $$(2n+2)\cdot\frac{2}{3}(2n+1)\cdot\frac{2n}{4}=(2n+2)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{3}(2n+1).$$

Mais il a été déjà expliqué que le résultat de la multiplication de la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre (des nombres) est la somme de ces nombres. D'après cela le résultat de la multiplication du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par la moitié du nombre (des nombres) sera la somme des nombres pairs suivant l'ordre. On est donc ramené à la multiplication de cette somme par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'aûquel (la suite) s'étend [1]. Mais deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend sont deux tiers (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité, attendu que les nombres (naturels) suivant leur ordre se dépassent mutuellement d'une unité, et que, par conséquent, leurs parties se dépassent mutuellement des parties (correspondantes) de l'(unité), ce qui est évident. L'opération revient donc à la multiplication de deux tiers du nombre jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité par la somme (des nombres pairs simples) [2], ainsi qu'il a été mentionné. Dieu seul connaît la vérité.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par la multiplication de la somme* (*des nombres pairs simples*) *par son double* [3]. F. 20, r°. lig. 9.

Pour la démonstration de ce (théorème) établissons préalablement deux propositions.

L'une d'elles c'est que la somme des nombres (naturels) depuis l'unité, suivant leur ordre, est la moitié de la somme des nombres pairs pris à partir du deux suivant leur ordre, et égaux en nombre aux (nombres naturels) [4]. Soient, par exemple, quatre nombres (naturels) suivant l'ordre, dont le premier soit l'unité et le dernier quatre; leur somme sera dix. Et soient quatre autres nombres pairs, dont le premier soit deux et le dernier huit; leur somme sera vingt. Or, chacun

---

[1] $(2n+2)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{3}(2n+1)=(2+4+6+\ldots+2n)\cdot\frac{2}{3}(2n+1).$

[2] $(2+4+6+\ldots+2n)\cdot\frac{2}{3}(2n+1)=\left[\frac{2}{3}(2n)+\frac{2}{3}\right]\cdot(2+4+6+\ldots+2n).$

[3] $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2(2+4+6+\ldots+2n)^2.$

[4] $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}(2+4+6+\ldots+2n).$

des nombres pairs étant le double de celui qui lui correspond parmi les nombres (naturels, pris) suivant leur ordre, un des nombres (naturels) est au (nombre pair) correspondant comme la somme des uns à la somme des autres suivant l'ordre. Cela est évident, en vertu de ce qui a été établi précédemment.

La seconde (proposition), c'est que le cube d'un nombre quelconque est égal à huit fois le cube de la moitié de ce même nombre [1].

Exemple. Soit A un nombre donné [2]; qu'il soit divisé en deux parties égales, que l'une des deux parties soit B, et qu'il s'agisse d'élever A au carré, c'est-à-dire de le multiplier par lui-même. Or, par sa division, chacun des deux facteurs a été partagé en deux segments, et tous ces segments sont égaux entre eux et égaux à la quantité B. Par conséquent la multiplication de A tout entier par lui-même est égale à la multiplication de chaque segment de l'un des deux facteurs par les deux segments de l'autre, accompagnée de l'addition des quatre résultats qui sont tous des carrés égaux, et dont chacun est égal au carré de B. Mais ces quatre carrés forment le carré de A; d'où il suit que le carré d'un nombre quelconque est égal à quatre fois le carré de sa moitié. En même temps il est connu que le cube d'un nombre quelconque est ce qui résulte de la multiplication de ce nombre par son carré. Mais la multiplication de A tout entier par son carré tout entier, est égale à la multiplication de chacune de ses deux moitiés par les quatre parties de son carré; et de la multiplication d'une de ses moitiés par les quatre parties de son carré, dont chacune est égale au carré de B, il résulte quatre cubes; de sorte que l'ensemble de ces cubes est égal à huit fois le cube de la moitié de (A), et que chacun de ces cubes est égal au huitième du cube de ce nombre (A). Par conséquent le cube de la moitié d'un nombre quelconque est égal au huitième du

[1] $$a^3 = 8 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

[2] Dans ce qui suit le texte du manuscrit arabe présente un certain nombre d'erreurs, qui proviennent évidemment de ce que le copiste ne comprenait pas bien ce qu'il écrivait. Mais il est trop facile de reconnaître ces méprises et de les corriger, pour qu'il vaille la peine de les signaler et de les relever une à une.

cube de ce nombre. C'est ce que nous nous étions proposé d'établir préalablement.

D'après cela, si nous voulons additionner les cubes des nombres pairs suivant l'ordre, et dont le premier soit deux, et si nous considérons ces nombres pairs comme s'ils étaient des nombres (naturels) suivant l'ordre, et dont le premier soit l'unité; alors la somme des cubes de ces derniers sera un huitième (de la somme) des cubes qu'il s'agit de trouver. Mais il a été expliqué, dans ce qui précède sur la sommation des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre, que, si l'on multiplie la somme de ces nombres par elle-même, il résulte la quantité cherchée. Donc vous multiplierez la somme des nombres (naturels) suivant leur ordre par elle-même et le résultat par huit, afin qu'il résulte la quantité (actuellement) cherchée. Mais le produit d'un nombre par lui-même et du résultat par huit est égal au produit du même nombre par son double et du résultat par quatre, ou égal au produit du double de ce même nombre par lui-même et du résultat | par deux. F. 20, v°.
En même temps il a été déjà expliqué que la somme des nombres pairs à partir du deux suivant l'ordre est le double de la somme des nombres (naturels correspondants) à partir de l'unité suivant l'ordre. En outre le produit de la somme des nombres pairs par elle-même et du résultat par deux est égal au produit du même nombre par son double. Par conséquént le résultat de la multiplication de la somme des nombres pairs par son double est la somme de leurs cubes, et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

Ayant ainsi expliqué la raison de la sommation des cubes des nombres pairs, mentionnons maintenant l'explication de la raison de la sommation des cubes des nombres impairs.

Cela s'expliquera au moyen de ce qui précède, quand nous aurons établi encore deux autres principes, dont l'un est que le produit du plus grand de deux nombres différents quelconques par son double est égal au produit de ce (nombre) par leur somme plus le produit du même par leur différence; et que le produit du plus petit par son double est égal au produit de ce (nombre) par leur somme moins son produit par leur différence [1]. Car il est évident que le plus grand des deux nom-

[1] $a.2a = a(a+b) + a(a-b)$, $b.2b = b(a+b) - b(a-b)$.

bres est exactement égal au plus petit plus leur différence, et que le plus petit des deux nombres est égal au plus grand moins leur différence. Il suit donc nécessairement que le double du plus grand est égal à leur somme plus leur différence, et que le double du plus petit est égal à leur somme moins leur différence.

Le second (principe) est que, si, dans (une suite) de nombres (naturels) quelconques (pris) suivant l'ordre à partir de l'unité, le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, la somme des nombres pairs compris dans (cette suite) dépasse la somme des nombres impairs y compris de la quantité du nombre des impairs; et si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, la somme des nombres pairs est inférieure à la somme des nombres impairs de la quantité des nombres des impairs.

En effet, si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, le nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre se partage en deux nombres égaux dont l'un est le nombre des nombres pairs compris dans (la suite) et l'autre celui des nombres impairs y compris. Mais le premier des nombres pairs, à savoir deux, dépasse le premier des nombres impairs d'une unité; et pareillement le second (nombre pair), à savoir quatre, dépasse le second des nombres impairs d'une unité; et ainsi de suite jusqu'au dernier. La somme des nombres pairs dépasse donc la somme des nombres impairs d'une quantité égale à leur nombre. Si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, le nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre se partage en deux nombres différents dont l'un, qui est le nombre des nombres impairs, dépasse l'autre d'une unité. Mais le premier des nombres impairs, à savoir l'unité, n'est précédé de rien; le second des nombres impairs dépasse le premier des nombres pairs de l'unité; et ainsi de suite jusqu'à ce que le dernier des nombres impairs, à savoir (le nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, dépasse le dernier des nombres pairs d'une unité. La somme des nombres impairs dépasse donc la somme des nombres pairs d'une quantité égale au nombre des nombres impairs.

Ceci étant établi, nous disons qu'il est évident que, si de la somme des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre, pris à partir de l'unité, on retranche la somme des cubes des nombres pairs y compris, il reste la somme des cubes des nombres impairs y compris. Or,

il a été déjà expliqué que la somme des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre résulte de l'élévation au carré de la somme de ces nombres [1]. Mais la somme de ces nombres est composée de deux sommes, c'est-à-dire de la somme des nombres pairs et de la somme des nombres impairs. Par conséquent son carré s'obtient par la multiplication de chacune des deux sommes par leur somme. Maintenant, si la somme des cubes des nombres pairs résultait de la multiplication de la somme des nombres pairs par la somme des deux sommes, la somme des cubes des nombres impairs résulterait nécessairement de la multiplication de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes. Mais il a été expliqué que la somme des cubes des nombres

---

[1] Pour faire mieux voir la suite et l'enchaînement des raisonnements qui forment la démonstration d'Ibn Almadjdî, désignons par S_n la somme d'une suite de nombres naturels, par S_i la somme et par ν_i le nombre des nombres impairs compris dans la suite, par S_p la somme des nombres pairs compris dans la suite, de sorte que $S_i + S_p = S_n$; désignons en outre par $S_{c,n}$ la somme des cubes des mêmes nombres naturels, par $S_{c,i}$ la somme des cubes des mêmes nombres impairs, et par $S_{c,p}$ la somme des cubes des mêmes nombres pairs, de sorte que $S_{c,i} + S_{c,p} = S_{c,n}$.

Cela posé, soit premièrement le dernier terme de la suite un nombre pair, de sorte que $S_p > S_i$, l'on aura

$$S_{c,n} = S_n^2 = (S_p + S_i)^2 = S_p(S_p + S_i) + S_i(S_p + S_i),$$
$$S_{c,p} = S_p . 2S_p = S_p(S_p + S_i) + S_p(S_p - S_i);$$

donc

$$\begin{aligned} S_{c,i} &= S_{c,n} - S_{c,p} = S_i(S_p + S_i) - S_p(S_p - S_i) \\ &= S_i(S_p + S_i) - S_i(S_p - S_i) - (S_p - S_i)^2 \\ &= S_i . 2S_i - (S_p - S_i)^2 = S_i . 2S_i - \nu_i^2 = S_i . 2S_i - S_i \\ &= S_i(2S_i - 1). \end{aligned}$$

Secondement, soit le dernier terme de la suite un nombre pair, de sorte que $S_i > S_p$, l'on aura

$$S_{c,n} = S_n^2 = S_p(S_i + S_p) + S_i(S_i + S_p),$$
$$S_{c,p} = S_p . 2S_p = S_p(S_i + S_p) - S_p(S_i - S_p),$$
$$\begin{aligned} S_{c,i} &= S_i(S_i + S_p) + S_p(S_i - S_p) = S_i . 2S_i - S_i(S_i - S_p) + S_p(S_i - S_p) \\ &= S_i . 2S_i - S_p(S_i - S_p) - (S_i - S_p)^2 + S_p(S_i - S_p) \\ &= S_i . 2S_i - (S_i - S_p)^2 = S_i . 2S_i - S_i = S_i(2S_i - 1). \end{aligned}$$

pairs résulte de la multiplication de la somme des nombres pairs par son double. En outre si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, il est évident que le produit de la somme des nombres pairs, qui est le plus grand des deux nombres, par son double est égal à son produit par la somme des deux sommes plus son produit par leur différence. D'après cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes moins le produit de la somme des nombres pairs, par leur différence. En même temps il a été expliqué que le plus grand de deux nombres se divise dans le plus petit et la différence. Le produit de la différence par le plus grand est donc égal à son produit par le plus petit plus son produit par elle-même, c'est-à-dire plus son carré. Par suite de cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes moins son produit par leur différence et moins le carré de la différence. Mais il a été expliqué que le produit du plus petit de deux nombres par leur somme moins son produit par leur différence est exactement égal à son produit par son double. D'après cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par son double moins le carré de la différence. Mais il a déjà été expliqué que la différence est égale au nombre des nombres impairs; et il a été expliqué en même temps, dans ce qui précède, que la somme des nombres impairs résulte de l'élévation au carré de leur
F. 21, r°. nombre. | Il suit donc nécessairement que le carré de la différence est la somme des nombres impairs. Mais le produit de la somme des nombres impairs par son double, si l'on retranche ensuite du résultat la somme des nombres impairs, est exactement égal au produit de la somme des nombres impairs par son double moins un, attendu que le principe de la multiplication consiste à prendre l'un des deux nombres autant de fois qu'il est contenu d'unités dans l'autre.

Si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, le plus petit des deux nombres est la somme des nombres pairs et le plus grand la somme des nombres impairs, ainsi qu'il a été expliqué; et le produit du plus petit des deux nombres par son double est égal à son produit par la somme des deux nombres moins son produit par leur différence. Par suite de cela la somme des cubes des nombres impairs ré-

sulte alors du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes plus le produit de la somme des nombres pairs par leur différence, ce qui est le produit du plus grand des deux nombres par leur somme plus le produit du plus petit par leur différence. Or, il a été déjà expliqué que le produit du plus grand de deux nombres par son double est égal à son produit par leur somme plus son produit par leur différence. Mais il a été déjà expliqué (en outre), que le produit du plus grand par la différence est égal au produit du plus petit par la différence plus le carré de la différence. D'après cela le produit du plus grand par son double est égal à son produit par leur somme plus le produit du plus petit par la différence et plus le carré de la différence. En même temps il a été expliqué que la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit du plus grand par la somme plus le produit du plus petit par la différence. Il s'ensuit donc nécessairement que le produit de la somme des nombres impairs par son double dépasse la somme de leurs cubes du carré de la différence. Mais il a été expliqué que le carré de la différence est exactement égal à la somme des nombres impairs. Par conséquent il résulte du produit de la somme des nombres impairs par son double diminué constamment de l'unité, la somme de leurs cubes. Et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

Il a dit [1] : Lorsque le commencement se fait à partir (d'un nombre) F. 21, r°, lig. 13.
différent de l'unité, vous déterminerez le nombre des nombres, ainsi qu'il a été exposé précédemment, puis la somme ou (le résultat de) l'addition à partir de l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite à partir de l'unité jusqu'au nombre qui précède le commencement, et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, pour les nombres pairs, la place de l'unité. On opère d'après cette seconde manière dans la sommation des carrés et des cubes se suivant d'après l'ordre à partir (d'un nombre) différent de l'unité. Sachez-le donc.

---

[1] Ces mots indiquent que ce qui suit est extrait du « Soulèvement du Rideau » d'Ibn Albannâ, ainsi qu'Ibn Almadjdî en a prévenu le lecteur dans sa préface. *Voir* ci-dessus, p. 88, lig. 13 à 15.

Attendu que les méthodes produites et mentionnées (dans ce qui précède) pour l'addition des nombres (naturels) suivant leur ordre, et pareillement des nombres impairs et des nombres pairs, sont fondées sur la condition de commencer par l'unité dans les deux premiers cas, et par le deux dans le troisième, ainsi qu'il a été dit dans ce qui précède, elles ne s'appliquent pas aux cas où le commencement se fait à partir (d'un nombre) différent de celui exigé par ladite condition. A cause de cela on opère alors d'après la méthode ordinaire, à savoir celle qui a été déjà expliquée à l'occasion de la neuvième des questions composées, c'est-à-dire du cas où l'on ignore le nombre (des termes de la suite) en même temps que la somme. Cette méthode consiste, pour trouver le nombre (des termes), en ce que vous divisez la différence des deux termes extrêmes par la quantité dont (les termes) se dépassent mutuellement, d'où il résultera le nombre (des termes) moins un. Ensuite vous multiplierez la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre (des termes) d'où il résultera la somme. Ou bien (on opère alors) d'après la seconde manière, ainsi qu'il vient d'être dit : parce que, si quelqu'un dit : additionnez les nombres impairs suivant leur ordre, par exemple depuis sept jusqu'à quinze, c'est comme s'il avait dit : additionnez les nombres impairs suivant leur ordre depuis l'unité jusqu'à quinze moins la somme des nombres impairs depuis l'unité jusqu'à six. Par là est expliqué aussi le reste des cas, parce que le principe est le même.

On comprend, d'après ce qui précède, que la première manière est plus particulière que la seconde, attendu qu'elle a pour condition l'existence de la proportion arithmétique, de sorte qu'elle ne comprend pas les (cas des) carrés et des cubes.

La phrase de l'auteur : « Le deux tient, pour les nombres pairs, la place de l'unité », signifie que, si les nombres pairs (pris) suivant leur ordre, et leurs carrés et leurs cubes, commencent par le deux, on opère d'après la méthode particulière précédemment mentionnée ; que si (la suite ne commence) pas (par le deux), on opère d'après les deux manières qui viennent d'être mentionnées, pourvu que la chose demandée soit seulement d'additionner les nombres pairs (simples) ; sinon, on emploie, pour leurs carrés et leurs cubes, la seconde manière exclusivement.

Quant à la manière de trouver les côtés rationnels des cubes, et les côtés d'autres (puissances) et à ce qui s'y rattache, nous mentionnerons cela certainement dans le chapitre des racines, si Dieu, le Très-Haut, le permet. F. 21, r°. lig. 29.

Il a dit : L'exposé (des propriétés) des carrés est fondé sur (celles) des triangles, et pareillement (la théorie) des pentagones et des autres nombres figurés. Expliquons donc cela, et expliquons la manière de les trouver, ainsi que l'opération (dont on se sert) dans ce (but) et dans leur addition. | Tout cela est compris dans l'opération mentionnée dans le Traité. Je dis donc que les Arithméticiens placent les nombres suivant leur ordre dans une ligne, et les appellent « côtés », en les assimilant aux lignes; qu'ils considèrent l'unité comme contenant virtuellement toutes les figures, de sorte qu'elle est côté, triangle, carré, et chacune des autres figures virtuellement; qu'ils additionnent l'unité, comme triangle, au deux comme côté, d'où résulte le second triangle, et qu'ils additionnent ensuite celui-ci au trois, comme côté, d'où résulte le troisième triangle, etc. F. 21, v°.

... [1] Puisque donc nous avons obtenu comme résultat ces quantités composées, multiplions le cubo-cube par un. Il en résultera (le cubo-cube) lui-même, et nous le posons dans une première ligne. Ensuite nous multiplions le quadrato-cube par dix, et nous posons le résultat dans une seconde ligne. Après cela nous multiplions le côté, c'est-à-dire le seize, par le coefficient des cubes, et nous posons cela dans une troisième ligne. Enfin nous plaçons le coefficient du carré dans une quatrième ligne. Nous additionnons les quatre lignes, d'où il provient ce qui se trouve au-dessus du trait, et cela est le résultat du premier membre de l'équation.

---

[1] Pour l'intelligence de ce qui suit je ferai observer qu'il s'agit ici de vérifier l'équation

$$x^8 + 10x^7 + 648000x^3 + 18662400x^2 = 461x^6 + 5400x^5 + 15480x^4,$$

et que l'on a

$$x = 16, \qquad x^4 = 65536,$$
$$x^2 = 256, \qquad x^5 = 1048576,$$
$$x^3 = 4096, \qquad x^6 = 16777216,$$

Ensuite nous multiplions le carré-carré par le coefficient du cubo-
F. 203, v°. cube, et nous posons cela dans une première ligne. | Nous multiplions le cube par le coefficient du quadrato-cube et nous posons cela dans une seconde ligne. Puis nous multiplions le carré par le coefficient du carré-carré, et nous posons cela dans une troisième ligne. Nous additionnons ces trois lignes, et il résulte ce qui se trouve au-dessus du trait. Cela est le résultat du second membre de l'équation, et est conforme au premier

		56293376
Le premier résultat.	Premier....	16777216
	Second....	10485760
	Troisième...	10368000
	Quatrième..	18662400

		56293376
Le second résultat.	Premier....	30212096
	Second.....	22118400
	Troisième...	03962880

Il est évident par là que la différence entre les deux parties est deux carrés moins dix, et non dix moins deux carrés, si par hasard vous aviez d'abord supposé cette différence égale à dix moins deux carrés.

Vous êtes arrivé, dans cet exemple, à ce qui a été expliqué précédemment, à savoir que l'on ne doit pas affirmer qu'une solution ne peut pas être juste, à moins d'avoir passé, pour les deux résultats opposés qui résultent de l'augmentation après la diminution, d'un nombre au nombre immédiatement suivant. Alors la justesse sera déterminée dans cette dernière forme. Conduisez donc l'opération dans ce cas conformément à ses conditions, et vous opérerez juste, si Dieu, le Très-Haut, le permet.

J'ai proposé tous les problèmes de cette section comme des (cas particuliers) dérivés d'un seul (problème) fondamental, afin de rendre évident par là que de tous les problèmes précédemment mentionnés il peut être déduit une infinité (de cas particuliers).

Que ceci soit la fin de ce que nous avons présenté dans cette composition bénie. Dieu seul connaît la vérité.

L'achèvement de cet (ouvrage) eut lieu à l'aube du jour béni de mercredi, le sixième (jour) du mois sacré de Dzoûl-hidjdjah de l'année

huit cent trente-quatre [1], par la main de celui qui a besoin du Dieu Très-Haut, qui l'a écrit et composé, Ahmed Ibn Almadjdì le châféite, puisse Dieu pardonner à lui, à ses père et mère, et à tous les musulmans, amen, amen. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur la plus noble de ses créatures, Mohammed, et sur sa famille.

Ceci est la fin de ce que j'ai trouvé dans l'exemplaire de mon Seigneur, qui fut écrit de sa main, puisse Dieu le Très-Haut prolonger sa vie; sur lequel (exemplaire) j'ai copié le présent exemplaire. L'achèvement de la copie du présent exemplaire eut lieu vers midi, le lundi, dix-septième (jour) du mois de Rabia second de l'année huit cent quarante [2]. Et cette copie fut faite pour son propre usage, et pour l'usage de qui il plaira à Dieu après lui, par l'esclave qui a besoin de la miséricorde de son maître le riche et l'éternel, Aboûl Baraqât Mohammed Ben Mohammed Ben Mohammed Al'irâkî, puisse Dieu pardonner à lui, à ses père et mère, aux docteurs (qui l'ont instruit), et à chacun de tous les musulmans, amen. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons. Dieu nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs.

---

[1] Cette date correspond au mercredi 15 août 1431 de J.-C.

[2] Le catalogue des manuscrits orientaux du *British Museum* donne ici, comme date du mois, dans le texte qu'il reproduit, le vingt-septième, et dans la traduction latine dont il accompagne ce texte, le vingt-sixième. L'un et l'autre est erroné. Le manuscrit porte en réalité le dix-septième; et ce qui prouve en outre que cette leçon est la bonne, c'est que le jour dont il s'agit doit être un lundi (*feria secunda*), ce qui a lieu en effet pour le 17 Rabîa II de l'année 840 de l'hégire qui correspond au lundi 29 octobre 1436 de Jésus-Christ, tandis que le 27 Rabîa II de l'année 840 de l'hégire est un jeudi.

Manuscrit coté CCCCXIX *des manuscrits orientaux du* British Museum (**7470** *des manuscrits additionnels*).

Volume in-4 de 114 feuillets en papier, dont les deux premiers et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés. Les 110 autres feuillets sont numérotés aux rectos avec les numéros 1 à 110 écrits au crayon en chiffre moderne, et aux versos avec les numéros 1 à 100 et 1 à 10 écrits à l'encre en chiffres arabes orientaux.

Ce manuscrit est occupé depuis lig. 1 du verso du feuillet numéroté 3, jusqu'à lig. 11 du recto du feuillet numéroté 110, par la copie d'un Traité intitulé « la Clef du calcul » par Djamchid Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth (Eddin) Alqâchânî. La copie est datée du lundi, (27) Chawwâl de l'année 997 de l'hégire, ou (probablement) 14 août [1] 1589 de J.-C.

Le verso du feuillet numéroté 1, et le recto et verso du feuillet numéroté 2, sont occupés par un premier projet de la préface qui se distingue de la rédaction qui occupe le verso du feuillet numéroté 3, particulièrement en ceci qu'il renferme une dédicace adressée au célèbre sultan de Samarkand, Ouloug Beh Goûrgân, et une table très-étendue des contenus des chapitres de l'ouvrage entier.

L'auteur fut un des astronomes qui prirent part à la rédaction des tables d'Ouloug Beg, mais mourut avant l'achèvement de cette œuvre. Comparer *Thomas Hyde*, Tabulæ long. ac lat. stellarum fixarum, ex observatione Ulugh Beighi; Oxonii, 1665, in-4, douzième page (non numérotée) de la « Præfatio ad lectorem », lignes 3 à 4 et 18 à 21. La préface de « la Clef du calcul » dont je fais suivre ici la traduction, contient des indications nombreuses et intéressantes sur les autres ouvrages de Djamchid Ben Mas'oûd.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 112 à 116 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon et mentionnée ci-dessus.

F. 3, v°, Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Louange à Dieu qui est unique pour la création des unités, et qui est seul cause de la composition des nombres [2]. Que sa bénédiction soit sur la meilleure de ses créatures, Mohammed, le plus puissant des intercesseurs au jour terrible de la résurrection, sur sa famille, et sur ses enfants qui guident dans les chemins du salut et de la bonne direction.

Pour en venir au fait. Celui qui, parmi les créatures de Dieu, le Très-Haut, a le plus besoin de son pardon, Djamchîd Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth Alqâchânî, que Dieu fasse prospérer sa situation, dit :

---

[1] Le mois de Chawwâl de l'année 997 de l'hégire comprend quatre lundis qui correspondent respectivement aux 14, 21, 28 août et 4 septembre de l'année 1589 de Jésus-Christ. La date numérique du jour du mois manque dans le manuscrit.

[2] Dieu est le représentant par excellence de l'unité, et l'unité est, par le moyen de la composition, le principe de la formation des nombres, « fons et origo numerorum ».

J'ai fait des opérations du calcul et des règles géométriques l'objet d'une étude approfondie, de sorte que j'en ai saisi les vrais procédés et que je suis parvenu au plus haut point dans leurs finesses. J'en ai éclairci les parties obscures et difficiles, et j'en ai résolu les questions douteuses et compliquées. J'ai découvert des règles et des théorèmes nombreux concernant ces sciences, et j'ai obtenu la solution de problèmes qui avaient paru tellement ardus à beaucoup d'autres savants, qu'ils avaient renoncé à s'en occuper. C'est ainsi que j'ai refait le calcul de toutes les colonnes des tables Ilkhâniennes [1] d'après les méthodes les plus exactes, et que j'ai composé les tables appelées Khâkâniennes en vue de compléter les tables Ilkhâniennes [2]. J'y ai réuni tout ce que j'ai inventé en fait d'opérations astronomiques, et qui ne se trouvait point dans d'autres tables, en y ajoutant des démonstrations géométriques. J'ai composé aussi les Tables servant à faciliter les opérations, et divers autres tableaux.

J'ai composé, en outre, des Mémoires (tels que le Mémoire intitulé) le Parfait, sur les [3] doutes qui se sont présentés aux anciens au sujet des distances et des volumes; le Mémoire (intitulé) le Contenant, sur le rapport du diamètre à la circonférence, et le Mémoire (intitulé) la Corde et le Sinus, sur la manière de déterminer ces deux (lignes) pour le tiers d'un arc dont on connaît la corde et le sinus. Ce dernier (problème) est encore un de ceux qui ont offert des difficultés aux anciens, ainsi que l'a dit l'auteur de l'Almageste en s'exprimant à ce sujet en des termes qui signifient ce qui suit. Il n'existe pas de méthode en aucune façon, pour connaître linéairement la corde du tiers d'un arc dont on connaît la corde. Or, puisqu'il en est ainsi, nous avons ima-

---

[1] Les tables Ilkhâniennes furent composées par le célèbre astronome Nacîr Eddîn Althoûcî (né en 1201 et mort en 1274 de Jésus-Christ) en honneur du Khân mongol Houlagou, qui mit fin au khalifat de Bagdâd par la conquête de cette ville en 1258 de Jésus-Christ, et qui fit construire pour Nacîr Eddîn l'observatoire de Merâghah.

[2] Ces mots à partir de « appelées » sont laissés en blanc dans le texte manuscrit. Je les ai rétablis au moyen du passage correspondant, fol. 1, verso du manuscrit dans le premier projet de la préface.

[3] Au lieu des mots « le Parfait, sur les », le passage correspondant du fol. 1, verso, porte : « par exemple le mémoire intitulé *l'Échelle du ciel*, sur la solution des ».

giné un artifice pour trouver la corde d'un degré avec une approximation très-exacte [1]. Et pareillement il a dit auparavant, au sujet de la manière de trouver la corde d'un demi-degré, qu'il n'existe pas de méthode pour la déterminer (d'une manière absolue).

J'ai aussi inventé l'instrument appelé le Disque des zones, et j'ai écrit sur la manière de le construire et d'(en) connaître (l'usage) un Mémoire intitulé les Délices des jardins. C'est un instrument qui sert à déterminer les longitudes vraies des planètes, leurs latitudes, leurs distances de la terre, leurs rétrogradations, les occultations et les éclipses, et tout ce qui s'y rattache.

J'ai trouvé des réponses à des questions nombreuses que m'avaient proposées les plus distingués des calculateurs, soit pour me mettre à l'épreuve, soit pour s'instruire; et quoique ces questions n'aient pas été toutes réductibles aux six cas algébriques [2], je suis parvenu, à l'occasion de ces opérations, à des théorèmes nombreux, à l'aide desquels les opérations du calcul peuvent être traitées de la manière la plus aisée, d'après la méthode la plus facile, avec le moindre travail, avec la plus grande utilité, et en présentant l'exposé le plus clair.

J'ai donc jugé convenable de les rassembler dans un recueil, et j'ai formé l'intention de les développer avec clarté, de manière que ce soit un manuel pour les amateurs, et un moyen d'augmenter encore la perspicacité des personnes donées d'intelligence.

F. 76, r°. *Exemple.* — Nous désirons (connaître) la somme des résultats des produits (formés) pour chacun des nombres jusqu'à six, (en multipliant d'abord chaque nombre) par le (nombre) suivant, puis le résultat par le (nombre) suivant. Nous additionnons (les nombres) depuis l'unité jusqu'au cinq. Ce sera quinze. Nous multiplions cela par qua-

---

[1] Comparer : Composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite, etc., par M. Halma, t. I; Paris, 1813, in-4, p. 34, lig. 5 et suivantes du texte grec. Il me semble qu'en cet endroit la traduction française ne serre pas d'assez près les expressions de l'original.

[2] C'est-à-dire à des équations du premier ou du second degré. Les six cas dont il s'agit sont représentés par les équations

$$x = a,\quad x^2 = ax,\quad x^2 = a,\quad x^2 + ax = b,\quad x^2 + a = bx,\quad x^2 = ax + b.$$

torze. Il résulte deux cent dix, ce qui est la quantité cherchée [1].

Douzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à combien nous en voulons, nous additionnons une unité au double du dernier nombre et nous multiplions un tiers de la somme par la somme desdits nombres [2].

Exemple. — Nous désirons additionner les carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous ajoutons au double de ce (dernier nombre) une unité. Il résulte treize, ce dont le tiers est quatre et un tiers. Nous multiplions cela par la somme desdits nombres, laquelle est vingt et un. Il résulte quatre-vingt-onze.

Treizième règle. — Si nous désirons additionner les cubes des (nombres) suivant l'ordre depuis l'unité (jusqu'à) combien nous en voulons, nous multiplions la somme de ces nombres par elle-même; il résultera la quantité cherchée [3].

Exemple. — Nous désirons (connaître) la somme des cubes des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous additionnons ces nombres. Ce sera vingt et un. Nous multiplions cela par lui-même. Il résulte quatre cent quarante et un, ce qui est la quantité cherchée.

Quatorzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des carré-carrés des nombres suivant l'ordre à partir de l'unité, nous retranchons de la somme de ces nombres une unité et nous prenons constamment un cinquième [4] du reste. Nous l'ajoutons à la somme

---

[1] $$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + (n-2)(n-1)n = [1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)].[1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)-1].$$

[2] $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{2n+1}{3}(1+2+3+\ldots+n).$$

[3] $$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

[4] Le texte manuscrit porte ici « un tiers ». Mais l'exemple qui suit prouve que ce n'est qu'une erreur de copiste.

desdits nombres, et nous multiplions ce qui en provient par la somme des carrés des mêmes nombres. Il résultera la quantité cherchée [1].

Exemple. — Nous désirons additionner les carré-carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous prenons la somme de ces nombres, ce qui est vingt et un. Nous en retranchons une unité; il reste vingt. Nous en prenons le cinquième, ce qui est quatre. Nous l'ajoutons à vingt et un; il provient vingt-cinq. Nous multiplions
f. 76, v°. cela | par quatre-vingt-onze, ce qui est la somme des carrés des mêmes nombres. Il résulte deux mille deux cent soixante-quinze.

Quinzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des puissances suivant l'ordre pour un nombre quelconque à partir de la première puissance, ce qui fait encore partie de ce que nous avons découvert [2], nous retranchons de la dernière puissance constamment une unité, et nous multiplions le reste par la première puissance. Nous divisons (ensuite) le résultat par un nombre moindre d'une unité que la première puissance. Ce qui résulte est ce que nous avions désiré.

Autre manière. — Nous retranchons de la dernière puissance la première puissance, et nous divisons ce qui reste par un nombre moindre d'une unité que la première puissance. A ce qui en résulte nous ajoutons la dernière puissance, afin qu'il résulte la quantité cherchée [3].

Exemple de la première manière. — Etc.

---

[1] $$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=\left\{\frac{1}{5}[1+2+3+\dots+(n-1)+n-1]+[1+2+3+\dots+n]\right\}\cdot(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

[2] Le texte manuscrit fait suivre ici le passage que voici : « nous multiplions la » première puissance par la dernière puissance et nous retranchons une unité de la » première puissance; ce qui résulte est la quantité cherchée. *Exemple.* » Après ce dernier mot le texte continue avec « Nous retranchons, etc. » Il est évident que ce passage ne se trouve intercalé à cette place que par la méprise d'un copiste très-négligent. En général cette partie du manuscrit est copiée avec peu de soin.

[3] $$a+a^2+a^3+\dots+a^n=\frac{(a^n-1)a}{a-1}=\frac{a^n-a}{a-1}+a^n.$$

LE

TALKHYS D'IBN ALBANNÂ,

TRADUIT

PAR M. AR. MARRE.

Notice et Extraits communiqués par le Traducteur.

La Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford possède, entre autres richesses, un manuscrit arabe très-précieux, coté « Marsh 378 » n° CCXVII de la première partie du catalogue latin dressé par Jean Uri. Dans ce manuscrit, on trouve, du feuillet 162 au feuillet 171, le *Talkhys amâli al hissâb* d'Abou'l Abbas Ahmed Ibn Albannâ, célèbre mathématicien et astronome, professeur à Maroc en 1222 de l'ère chrétienne. Ce petit et curieux traité des opérations du calcul fut copié de la main d'un savant bien connu des lecteurs du *Journal de Mathématiques*, M. François Woepcke, peu de temps avant sa mort; il a été traduit récemment par M. Ar. Marre, et publié dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XVII; enfin il vient d'être imprimé à part par les soins du prince don Balthasar Boncompagni, de Rome [*]. Le moyen le plus simple et en même temps le plus sûr de donner ici une idée de cet ouvrage, c'est d'en détacher la table des matières, et de la faire suivre d'extraits choisis de la traduction, avec des notes explicatives du traducteur.

[*] Quelques exemplaires de cette brochure se trouvent à Paris, à la librairie de Gauthier-Villars, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Grands-Augustins, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES NOMBRES CONNUS.

PREMIÈRE SECTION.

SUR LES NOMBRES ENTIERS.

DEUXIÈME SECTION.

SUR LES FRACTIONS.

TROISIÈME SECTION.

SUR LES RACINES.

SECONDE PARTIE.

SUR LES RÈGLES A L'AIDE DESQUELLES IL EST POSSIBLE D'ARRIVER A LA CONNAISSANCE DE L'INCONNUE, EN PARTANT DES DONNÉES DE LA QUESTION PROPOSÉE.

PREMIÈRE SECTION.

OPÉRATION PAR LA PROPORTION.

SECONDE SECTION.

SUR ALGÈBR ET ALMOKABALAH.

Ibn Albannâ (le fils de l'architecte) définit ainsi le but de son ouvrage : « *Le but dans la composition de ce traité est d'analyser succinctement les opérations du calcul, d'en rendre plus facilement accessibles les portes et les vestibules, et d'en établir solidement les fondements et la bâtisse. Il comprend deux parties, la première sur les opérations du nombre connu, la seconde sur les règles qui rendent possible d'arriver à connaître l'inconnue demandée à l'aide des connues, s'il existe entre elles la liaison que cela exige.* » Page 1.

« *Le nombre entier est de deux sortes, pair et impair. Le pair est de trois espèces : pair, pair de l'impair, pair du pair et de l'impair. L'impair est de deux espèces : impair-premier et impair de l'impair.* » Page 2.
Les pairs de la première espèce sont les puissances de 2, la seconde espèce comprend les nombres doubles d'un impair, la troisième espèce renferme les autres nombres pairs. Des deux espèces de l'impair, la première s'entend des nombres premiers absolus, la seconde des impairs formés du produit de nombres impairs, tels que 9, 15, 21, 25, 27, etc.

« L'addition se divise en cinq espèces : 1° addition des nombres sans rapport connu; 2° addition des nombres avec des différences connues; 3° addition de la suite des nombres, et de leurs carrés et de leurs cubes; 4° addition de la suite des impairs, et de leurs carrés et de Page 3.

leurs cubes; 5° addition de la suite des pairs, et de leurs carrés et de leurs cubes. »

La première, c'est notre addition vulgaire; la deuxième, c'est l'addition ou sommation des nombres en progression géométrique ou en progression arithmétique. La formule employée par Ibn Albannâ dans le premier de ces deux cas est

$$S = \frac{a(l-a)}{aq-a} + l,$$

et pour le cas de la progression arithmétique

$$S = (a+l)\frac{n}{2}.$$

Nous reproduirons textuellement comme digne du plus haut intérêt, l'exposé succinct des opérations dans les trois dernières espèces d'addition.

Page 5. « Addition de la suite des nombres. — *C'est la moitié de celui qui la termine par celui qui la termine et un;*

« *Et la sommation des carrés : par la multiplication des deux tiers de celui qui la termine, augmentés du tiers de un, par la somme de la suite.*

« *Et la sommation des cubes : par l'élévation au carré de la somme de la suite.*

« Addition de la suite des impairs : *c'est que tu carres la moitié de celui qui la termine additionné avec l'unité.*

Page 6. « *Et la sommation des carrés : par la multiplication du sixième de celui qui la termine par le rectangle des deux nombres consécutifs après lui;*

« *Et la sommation des cubes : par la multiplication de la somme de la suite par son double moins un.*

« Addition de la suite des pairs : *c'est que tu ajoutes deux à celui qui la termine, et que tu multiplies la moitié du total par la moitié de celui qui la termine;*

« *Et la sommation des carrés : par la multiplication des deux tiers de celui qui la termine et des deux tiers de un, par la somme de la*

suite; ou bien par la multiplication du sixième de celui qui la termine par le rectangle des deux nombres qui viennent après lui;

« *Et la sommation des cubes : par la multiplication de la somme de la suite par son double.* »

Si nous traduisons en langage algébrique ces divers énoncés, nous aurons les formules suivantes :

1° $S_1 = \frac{n}{2}(n+1)$, $S_2 = \frac{2n+1}{3}S_1$, $S_3 = S_1^2$,

2° $S_1 = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$, $S_2 = \frac{l}{6}(l+1)(l+2)$, $S_3 = S_1(2S_1 - 1)$,

3° $S_1 = \frac{l+2}{2} \times \frac{l}{2}$, $\begin{cases} S_2 = \frac{2(l+1)}{3} \times S_1, \\ \text{ou} \\ S_2 = \frac{l}{6}(l+1)(l+2), \end{cases}$ $S_3 = S_1 \times 2S_1$.

« *La soustraction, c'est la recherche de ce qui reste après qu'on a rejeté l'un des deux nombres de l'autre. Il y en a deux espèces : l'espèce où tu soustrais le moins du plus une seule fois, et l'espèce où tu soustrais le moins du plus plus d'une fois, jusqu'à ce que le plus disparaisse, ou qu'il reste de lui une différence moindre que le moins, et cette espèce-là se nomme l'épreuve par la soustraction.* » Page 8.

Ainsi la seconde espèce de soustraction, c'est la soustraction dans laquelle on retranche d'un nombre donné un autre nombre plus petit, non pas une seule fois, mais autant de fois consécutives que le second nombre est contenu dans le premier. Cette espèce de soustraction est d'un grand usage dans la preuve des diverses opérations. C'est à ce dernier point de vue que l'auteur expose spécialement ce qu'il appelle la soustraction, de 9, de 8, de 7, ou tare par 9, par 8, par 7.

Le Chapitre relatif à la multiplication est assurément l'un des plus curieux. Parmi les nombreux procédés employés pour faire la multiplication de deux nombres entiers l'un par l'autre, mentionnons les suivants, qui mériteraient d'être connus de tous les arithméticiens. Page 11.

Soit proposé de multiplier par lui-même un nombre entier dont Page 13.

chaque chiffre est l'unité. Il suffit pour avoir le produit, d'écrire le nombre des chiffres du nombre proposé, et de le flanquer symétriquement à droite et à gauche de la suite décroissante des chiffres moindres que lui, jusqu'à 1 inclusivement.

Exemples :

$$111 \times 111 = 12321,$$
$$11111 \times 11111 = 123454321,$$
$$111111 \times 111111 = 12345654321.$$

Soit proposé de multiplier deux nombres ayant autant de chiffres l'un que l'autre, les chiffres du multiplicande étant tous égaux entre eux, et ceux du multiplicateur aussi tous égaux entre eux. Si l'on demande de multiplier par exemple 7777 par 6666, cette multiplication revient à multiplier 7 par 6, et ce premier produit par 1234321.

Page 15. Si le chiffre qui se rencontre toujours le même dans l'un des nombres à multiplier est 9, auquel cas la multiplication prend le nom de multiplication des 9, « *voici la description de l'opération : Tu poses les deux lignes parallèles, l'une d'elles sous l'autre, tu marques au-dessus d'elles des points en nombre égal à ce qu'il y a d'habitations en elles deux : tu multiplies le nombre de l'habitation de l'une des deux par le nombre de l'habitation de la seconde; tu poses les unités du résultat dans la première des marques et ses dizaines au milieu du restant des marques; tu observes ce qu'il y a entre le 9 et le nombre du multiplicateur, tu en emplis les marques entre les deux nombres sortis, c'est-à-dire les unités et les dizaines; tu emplis le restant des marques par le nombre donné à l'exclusion du 9; et ce à quoi tu parviens, c'est la réponse.* »

Soit 99 à multiplier par 33 :

```
3267
....
  99
  33
```

$9 \times 3 = 27$. Je place les unités du résultat à la première marque, et les dizaines au milieu des marques restantes; entre le chiffre 7 des unités et le chiffre 2 des dizaines, je place le chiffre 6, qui exprime la

différence entre le chiffre 9 du multiplicande et le chiffre 3 du multiplicateur; à l'autre marque je place le nombre donné 3 du multiplicateur, et il en résulte le produit 3267.

De même si l'on a 999 à multiplier par 333, le produit sera

$$\dot{3}\;\dot{3}\;\dot{2}\;\dot{6}\;\dot{6}\;\dot{7}.$$

Le produit de 9999 par 3333 serait

$$\underset{\cdot}{3}\;\underset{\cdot}{3}\;\underset{\cdot}{3}\;\underset{\cdot}{2}\;\underset{\cdot}{6}\;\underset{\cdot}{6}\;\underset{\cdot}{6}\;\underset{\cdot}{7}.$$

De là résulte un moyen expéditif d'élever au carré un nombre composé exclusivement de 9.

$$999 \times 999 = \underset{\cdot}{9}\,\underset{\cdot}{9}\,\underset{\cdot}{8}\,\underset{\cdot}{0}\,\underset{\cdot}{0}\,\underset{\cdot}{1},$$

$$99999 \times 99999 = 9999800001.$$

On pourrait formuler la règle ainsi qu'il suit : pour former le carré d'un nombre composé de n chiffres, tous égaux à 9, écrivez-en $(n-1)$, faites-les suivre du chiffre 8, et celui-ci d'autant de zéros que vous venez d'écrire de 9, et enfin terminez par le chiffre 1.

Mentionnons encore l'un des deux procédés employés pour la multiplication dite multiplication par l'élévation au carré, parce qu'il nous paraît se rattacher à un ordre d'idées de provenance hindoue :

« *On en connaît une autre espèce par l'élévation au carré*; *et c'est que tu prends la moitié de la somme des deux nombres à multiplier l'un par l'autre, tu l'élèves au carré, et du résultat tu soustrais le carré de la demi-différence entre eux deux; ce qui est resté, c'est le résultat de la multiplication.* » Page 16.

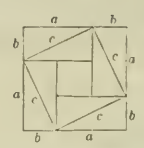
En d'autres termes, pour obtenir le produit ab, on fait les opérations indiquées dans le premier membre de l'égalité

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

ou en chassant les dénominateurs :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$

vérité que rend palpable, pour ainsi dire, la figure géométrique tracée ci-dessous.



Cette figure, familière aux Hindous, fournit trois démonstrations du fameux théorème du carré de l'hypoténuse, savoir :

1°
$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2\,;$$

2°
$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2\,;$$

3°
$$c^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = a^2 + b^2.$$

Page 20. « *Or il y a cinq espèces de fractions : isolées, en rapport, en désunion, subdivisées, séparées en deux par un moins. — Le numérateur de la fraction isolée, c'est le dessus de la fraction. — Le numérateur de la fraction en rapport, c'est ce qui est sur le premier dénominateur multiplié par le dénominateur suivant, augmenté de ce qui est au-dessus de celui-ci, et ainsi jusqu'à la fin de la ligne d'écriture; ou bien c'est ce qui est sur le premier dénominateur, multiplié par les dénominateurs qui viennent après, et ce qui est sur le second dénominateur multiplié par les dénominateurs qui viennent après, et comme cela jusqu'à ce que la ligne d'écriture soit finie, puis tu additionnes le tout. — Le numérateur de la fraction en désunion s'obtient par la multiplication du numérateur de chaque section par le dénominateur de l'autre, et par l'addition du tout. — Le numérateur de la fraction subdivisée, en multipliant*
Page 21. *entre eux les nombres qui sont au-dessus de la ligne. — Le numérateur de la fraction séparée en deux par un moins : s'il y a disjonction, tu procèdes comme pour la fraction en désunion, et tu soustrais le moins du plus; s'il y a conjonction, tu multiplies le numérateur du minorande par le numérateur du minorateur, et tu le multiplies également par le dénominateur, puis tu soustrais le moins du plus. S'il y avait un nombre*

entier avec ces fractions, en tête de la première, multiplie par le dénominateur et additionne avec le numérateur. S'il était à la fin, multiplie par lui le numérateur. S'il était au milieu d'elles, faisant corps avec ce qui est avant lui, et alors il est conséquent, ou faisant corps avec ce qui est après lui, et alors il est antécédent, tu procèdes, dans le cas où il est conséquent, comme pour la fraction en désunion, et tu multiplies par le numérateur du reste dans le cas où il est antécédent. Et il faut que l'association cesse entre le numérateur et le dénominateur. »

La première espèce de fraction est notre fraction ordinaire proprement dite. Donnons des exemples des quatre autres espèces mentionnées ci-dessus : P. 20 et 21.

Soit la fraction de la deuxième espèce $\frac{4\ \ 3}{5\ \ 4}$, le numérateur sera

$$3 \times 5 + 4.$$

Soit la fraction $\frac{5\ \ 4\ \ 3}{6\ \ 5\ \ 4}$, le numérateur sera, en appliquant la première règle énoncée, égal à $(3 \times 5 + 4)\,6 + 5$, c'est-à-dire 119, ou bien en appliquant la seconde règle $(3 \times 5 \times 6) + (4 \times 6) + 5$, ou 119.

Soit la fraction $\frac{3\ \ 1\ \ 4\ \ 5}{4\ \ 3\ \ 7\ \ 9}$, le numérateur sera

$$(5 \times 7 \times 3 \times 4) + (4 \times 3 \times 4) + (1 \times 4) + 3, \quad \text{ou} \quad 475.$$

Exemples de la troisième espèce :

Soit

$$\frac{4}{5}\ \frac{3}{7},$$

le numérateur $= 3 \times 5 + 4 \times 7$, ou 43.

Soit

$$\frac{3\ \ 4}{7\ \ 5}\ \frac{3}{4},$$

le numérateur $= 3 \times 5 \times 7 + (4 \times 7 + 3)\,4 = 229$.

Exemples de la quatrième espèce : Page 21.

$$\frac{6}{7}\Big|\frac{4}{5}\Big|\frac{1}{3}, \text{ le numérateur} = 1 \times 4 \times 6 = 24.$$

$\frac{6}{7}\Big|\frac{5}{6}\Big|\frac{4}{5}\Big|\frac{3}{4}\Big|\frac{2}{3}$, le numérateur $= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

Exemples de la cinquième espèce :

$$\frac{1\;\;7}{2\;\;8} - \frac{1}{4}.$$

On procede comme dans la troisième espèce, puis l'on soustrait le moins du plus. Pour plus de clarté nous avons rendu par le mot « minorande » ce qui précède le signe moins, et par le mot « minorateur » ce qui le suit, par analogie avec les mots plus usités de multiplicande et multiplicateur, dividende et diviseur.

Nous aurons donc pour numérateur la valeur de

$$(7 \times 2 + 1)4 - 1 \times 16, \quad \text{ou} \quad 44.$$

Soit proposée la fraction

$$\frac{3\;\;1\;\;4\;\;5}{4\;\;3\;\;7\;\;9} - \frac{4\;\;3}{5\;\;8},$$

$[(5 \times 7 + 4)3 + 1]4 + 3$, ou 475, est le numérateur du minorande; 5×8 est le dénominateur du minorateur; $3 \times 5 + 4$ est le numérateur du minorateur, et $4 \times 3 \times 7 \times 9$, ou 756, est le dénominateur du minorande. De là il suit que le numérateur de l'expression tout entiere est

$$475 \times 40 - 19 \times 756 \quad \text{ou} \quad 19000 - 14364 \quad \text{ou} \quad 4636.$$

Soit la fraction

$$\frac{1\;\;3\;\;5}{3\;\;4\;\;7} - \frac{1\;\;1}{3\;\;4},$$

le numérateur sera

$$[(5 \times 4 + 3)3 + 1]3 + 4 - [(5 \times 4 + 3)3 + 1](1 \times 3 + 1)$$
$$\text{ou} \quad 840 - 280 \quad \text{ou} \quad 560.$$

Enfin dans le cas de l'adjonction d'un nombre entier à ces sortes de

fractions, établissons par des exemples les opérations à effectuer pour avoir le numérateur.

1° $\frac{1}{2}\frac{5}{6}5$, le numérateur $= (5 \times 6 + 5)\,2 + 1 = 71$,
$\frac{5}{7}\frac{3}{4}6$, le numérateur $= (6 \times 4 + 3)\,7 + 5 = 194$.

2° $8\frac{5}{6}\frac{3}{4}$, le numérateur $= (3 \times 6 + 5)\,8$,
$5\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$, le numérateur $= (5 \times 4 + 3 \times 6)\,5$.

3° $\frac{2}{3}\ 6\frac{3}{4}\frac{2}{5}$,
le numérateur $= [(2 \times 4 + 3)\,6]\,3 + (6 \times 3 + 2) = 218$.
$\frac{1}{5}3\ \frac{1}{3}\frac{3}{4}$,
le numérateur $= (3 \times 5 + 1)(3 \times 3 + 1) = 16 \times 10 = 160$.

DEUXIÈME PARTIE.

« SUR LES RÈGLES PAR LESQUELLES IL EST POSSIBLE DE PARVENIR A L'INCONNUE DEMANDÉE, EN PARTANT DE CE QUI EST CONNU ET DONNÉ. Page 26.

« *Elle se divise en deux sections : section sur l'opération par la proportion, et section sur algèbr et almokabalah.* »

« PREMIÈRE SECTION. »

« *C'est l'opération par la proportion. Elle se fait de deux manières, par les quatre nombres en proportion et par les plateaux de balance. Les quatre nombres en proportion sont les nombres tels que le rapport du premier d'entre eux au second est le même que le rapport du troisième au quatrième. La multiplication du premier par le quatrième est la même que la multiplication du second par le troisième. Quand tu multiplies le second par le troisième et que tu divises par le premier, il en résulte le quatrième, ou si tu divises par le quatrième, il en résulte le premier. Quand tu multiplies le premier par le quatrième et que tu*

divises par le second, il en résulte le troisième, ou si tu divises par le troisième, il en résulte le second. Quelle que soit l'inconnue, elle résulte de cette opération sur les trois autres nombres qui sont connus. Le mode de l'opération consiste en cela que tu multiplies le nombre isolé, dont l'espèce est différente de celle des deux autres, par le nombre correspondant à l'inconnue, et que tu divises par le troisième nombre, il en résulte l'inconnue. »

« *Les plateaux de balance. C'est par l'art géométrique, et la méthode est celle-ci : Tu prends des balances de cette forme*

tu places ce qui est connu et proposé sur la voûte, tu déposes sur un des deux plateaux tel nombre que tu voudras, tu effectues là-dessus ce qui est proposé par l'addition, l'abaissement ou autre opération, puis tu compares avec cela ce qui est sur la voûte; si tu es tombé juste, ce
Page 27. *plateau-là c'est le nombre inconnu; si tu es tombé à faux, marque l'erreur au-dessus du plateau si elle est par excès, ou au-dessous si elle est par défaut; ensuite dépose sur l'autre plateau tel nombre que tu voudras, différent du premier, et procède avec lui comme tu as procédé avec le premier; puis multiplie l'erreur de chaque plateau par le (supposé) vrai de l'autre; puis examine : si les erreurs sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, soustrais la plus petite de la plus grande, et le plus petit des deux produits du plus grand, et divise le reste des deux produits par le reste des deux erreurs; et si l'une des deux est positive et l'autre négative, divise la somme des deux produits par la somme des deux erreurs.* »

Page 27. « *Si tu veux, dépose sur le second plateau le nombre du premier ou un autre, dégages-en les parties, compare avec elles ce qui est sur la voûte, multiplie cela par le (supposé) vrai du premier, et multiplie l'erreur du premier par le (supposé) vrai du second; puis si l'erreur du premier est par défaut, additionne les deux produits, si elle est par excès prends la différence entre eux deux; tu divises le résultat par les parties du second plateau, et tu obtiens le nombre demandé.* »

La règle des plateaux de balance désigne, comme on le voit, ce que nous appelons la règle des deux fausses positions.

Soit proposé de trouver le nombre qui, augmenté de ses deux tiers et de l'unité donne 10.

1 6
10
6 9

$$9 + \frac{2}{3}9 + 1 = 16 \quad \text{ou} \quad 10 + 6 \qquad \text{Première erreur} = +6$$

$$6 + \frac{2}{3}6 + 1 = 11 \quad \text{ou} \quad 10 + 1 \qquad \text{Deuxième} \;\text{»}\; = +1$$

d'où

$$x = \frac{6 \times 6 - 1 \times 9}{6 - 1} = 5\tfrac{2}{5}.$$

Ce premier exemple est emprunté au *Kholâçat al Hissâb* (*quintessence du calcul*) de Behâ-Eddin, le premier traité de mathématiques élémentaires des Arabes qui ait été traduit en français [*].

Soit proposé de trouver un nombre qui, répété six fois, puis sept fois, donne un total égal à 25.

53
25
1 6
12

$$6 \times 6 + 6 \times 7 = 78 \quad \text{ou} \quad 25 + 53 \qquad \text{Première erreur} = +53$$

$$1 \times 6 + 1 \times 7 = 13 \quad \text{ou} \quad 25 - 12 \qquad \text{Deuxième} \;\text{»}\; = -12$$

d'où

$$x = \frac{53 \times 1 + 12 \times 6}{53 + 12} = 1\tfrac{12}{13}.$$

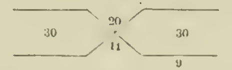
Ce second exemple est extrait du commentaire du *Talkhys* d'Ibn Albannâ, composé par Alkalçâdi, mathématicien arabe-espagnol, mort en 1486 de notre ère.

---

[*] On trouve encore chez Gauthier-Villars quelques exemplaires de la 2e édition, publiée à Rome en 1864 par les soins du prince don Balthasar Boncompagni.

Appliquons maintenant le procédé suivant lequel on met sur le second plateau le même nombre que sur le premier.

Soit proposé de trouver la quantité dont le cinquième et le sixième additionnés ensemble donnent pour somme le nombre 20.



Mettons 30 sur le premier plateau et aussi sur le second. Dégageons ce que l'auteur appelle les parties, c'est-à-dire $\frac{30}{5} + \frac{30}{6}$ ou le nombre 11. La différence avec 20 est de 9 par défaut; la première erreur est donc égale à -9, posons-la au-dessous du premier plateau, puis le nombre 11 sous la voûte; multiplions ce dernier nombre 11 par le 30 du premier plateau, puis l'erreur du premier plateau, 9, par le 30 du deuxième plateau, additionnons les deux résultats,

$$11 \times 30 + 9 \times 30 = 600.$$

Divisons par les parties du second plateau, c'est-à-dire par le 11 déposé sous la voûte, il en résulte l'inconnue :

$$x = \frac{11 \times 30 + 9 \times 30}{11} = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}.$$

Supposons maintenant qu'on mette sur le second plateau un nombre différent de celui qui a été mis sur le premier. Ainsi soit à trouver le nombre dont le tiers et le quart additionnés égalent 21.

21 18 12 $10\frac{1}{2}$ 14

La première erreur est de 14 par défaut, les parties du second plateau

$$\frac{18}{3} + \frac{18}{4} = 10\tfrac{1}{2},$$

d'où

$$x = \frac{10\frac{1}{2} \times 12 + 14 \times 18}{10\frac{1}{2}} = \frac{378}{\frac{21}{2}} = 378 \times \frac{2}{21} = 18 \times 2 = 36.$$

« SECONDE SECTION. »

« SUR ALGÈBR ET ALMOKÂBALAH. » Page 28.

« *Les opérations qui s'y rapportent comprennent cinq chapitres.* »

Le chapitre deuxième, intitulé « *Sur l'opération dans les six formes,* » est consacré à l'exposition des opérations à effectuer pour résoudre les trois formes d'équation dites simples,

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = n, \quad bx = n,$$

et les trois formes d'équation dites composées,

$$ax^2 + bx = n, \quad ax^2 + n = bx, \quad bx + n = ax^2.$$

Il est digne de remarque que cet ordre des six formes algébriques est identiquement le même que celui de l'algèbre de Mohammed ben Moussa Alkhowarezmi, ouvrage composé dans le IXe siècle de notre ère.

« CHAPITRE DEUXIÈME. »

« *Sur l'opération dans les six formes.* »

« *Les trois simples : — Tu divises par les mâl ce qui leur est égalé, et par les racines dans la sorte d'équation dépourvue de mâl, et par la division de la première sorte et de la troisième tu obtiens la racine, et par la division de la deuxième le mâl; or, si tu connais la racine, tu connais* Page 29.
le mâl en multipliant la racine par elle-même, et si tu connais le mâl, par lui tu connais la racine. »

« *L'opération dans la quatrième sorte, c'est que tu prends la moitié du nombre des chey, tu élèves au carré cette moitié, tu l'ajoutes au nombre, tu extrais la racine de la somme, et tu soustrais de cela le demi-coëfficient, il reste la racine.* »

« *Et dans la sixième sorte l'opération est la même, si ce n'est que tu ajoutes le demi-coëfficient à la racine de la somme, et tu as la racine. Et dans la cinquième sorte, tu soustrais le nombre du carré du demi-coëfficient des chey, et tu prends la racine du reste; si tu ajoutes cela au*

demi-coëfficient, tu obtiens la plus grande racine du mâl; si tu l'en soustrais tu obtiens la plus petite racine du mâl. »

« *Quand le carré du demi-coëfficient se trouve être égal au nombre, alors le demi-coëfficient c'est la racine, et le mâl c'est le nombre.* »

« *Dans les trois formes composées, tout ce que tu rencontres de plus* Page 29. *grand qu'un mâl, abaisse-le à un mâl, et abaisse en même temps par cela tous les termes de l'équation; tout ce que tu rencontres en elles de plus petit qu'un mâl, réintègre-le à un mâl, et réintègre par cela tous les termes de l'équation. L'opération dans la réintégration et l'abaissement se fait comme il a été dit précédemment. Et si tu veux, divise les éléments constituants du problème par le nombre des mâl (coëfficient de* x^2*) qu'il renferme; ce qui en résulte, c'est à quoi revient le problème; fais la comparaison.* »

Nous ne citerons du chapitre quatrième que ces deux lignes qui le Page 31. terminent, parce qu'elles contiennent l'énoncé bref et clair de ce que nous appelons la règle des signes :

« *Le produit de deux positives l'une par l'autre, et de deux négatives l'une par l'autre, est positif; le produit d'une positive par une négative est négatif.* »

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIX-SEPTIÈME ARTICLE.

1. La formule qui est l'objet de ce dix-septième article a quelque importance à mes yeux. Elle jouera un rôle utile dans l'ensemble de mon travail.

Soit

$$m$$

un nombre impair donné,

$$d$$

un quelconque des diviseurs de m (dont 1 et m font toujours partie) et

$$\delta$$

le diviseur conjugué, en sorte que

$$m = d\delta.$$

Étendons d'ailleurs cette notation aux autres entiers impairs, comme

$$m',\ m''$$

ou

$$m_1,\ m_2,$$

que nous aurons plus tard à considérer, c'est-à-dire posons de même de toutes les manières possibles

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

ou bien

$$m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2,$$

d', δ', d'', δ'', d_1, δ_1, d_2, δ_2 étant toujours des entiers positifs.

2. Cela compris, je regarde l'entier impairement pair $2m$ comme décomposé de toutes les manières possibles en une somme de deux entiers positifs impairs m', m''. Pour avoir ainsi

$$2m = m' + m'',$$

on n'aura qu'à faire successivement

$$m' = 1, \quad m' = 3, \ldots, \quad m' = 2m - 1;$$

les valeurs correspondantes de m'' seront

$$m'' = 2m - 1, \quad m'' = 2m - 3, \ldots, \quad m'' = 1.$$

Mettant ensuite m' et m'' sous la forme de produits d'après ce qu'on a expliqué plus haut, on aura l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

qui est une de celles dont nous voulons nous occuper dans cet article.

En introduisant une fonction

$$\psi(x, y)$$

de deux variables, nous tirerons de l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta''$$

la somme triple que voici :

$$\sum\left[\sum\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}}\psi(d'-d'', \delta'+\delta'')\right].$$

Les deux premieres sommations portent sur les valeurs de d', δ' et d'', δ'' relatives à chaque groupe m', m''; la dernière concerne le total fait, pour l'ensemble des groupes, des sommes partielles ainsi obtenues.

Au reste, on pourra n'écrire qu'un seul signe

$$\sum;$$

il n'y aura aucune difficulté à se représenter ce que nous entendrons par

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}} \psi(d'-d'', \delta'+\delta''),$$

et la notation restera suffisamment expressive en devenant beaucoup plus simple.

Jusqu'ici la fonction

$$\psi(x, y)$$

qui figure sous le signe sommatoire est entièrement arbitraire. Plus tard nous l'assujettirons à quelques conditions qui seront indiquées en temps utile.

5. Il faut maintenant se représenter le nombre m comme formé de deux parties entières et positives, l'une impaire, l'autre paire, c'est-à-dire écrire de toutes les manières possibles

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

m_1 et m_2 étant des entiers impairs et positifs; les valeurs successives de m_1 seront

$$1, 3, 5, \ldots, m-4, m-2;$$

celles de m_2 en résulteront par notre équation même qui donne

$$2^{\alpha_2} m_2 = m - m_1,$$

l'exposant α_2 variant d'un cas à l'autre. En mettant m_1 et m_2 sous la forme de produits, nous aurons ensuite l'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2\delta_2,$$

et nous pourrons considérer la somme nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

qui se rapporte au mode de partition que cette équation indique. Bien qu'il s'agisse ici encore d'une somme triple, nous n'employons qu'un seul

$$\sum,$$

persuadés que cela ne nuira pas à la clarté. On se souviendra que la sommation porte sur l'ensemble des valeurs de

$$d_1,\ \delta_1,\ 2^{\alpha_2} d_2,\ \delta_2$$

qui sont compatibles avec la nature de ces quantités elles-mêmes et avec l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2.$$

Au reste la somme triple écrite explicitement serait

$$\sum \left[\sum\sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2 + 1} d_2) \right],$$

les deux premiers

$$\sum$$

portant sur les valeurs de

$$d_1,\ \delta_1,\ 2^{\alpha_2} d_2,\ \delta_2$$

relatives à chaque groupe

$$m_1,\ 2^{\alpha_2} m_2,$$

et le troisième sur le total, pour l'ensemble des groupes, des sommes partielles ainsi obtenues.

4. Il faut maintenant rapprocher entre elles la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta' - 1}{2} + \frac{d'' - 1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta'')$$

du n° **2**, que nous désignerons par

$$S',$$

et la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

du n° 3, que nous désignerons par

$$S_1.$$

Ce rapprochement s'opérera au moyen d'une certaine somme simple

$$S,$$

relative à l'équation

$$m = d\delta,$$

et que nous définirons en disant que

$$S = \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \psi(0, 2d).$$

Mais pour arriver au but, nous devrons imposer quelques restrictions à l'absolue généralité de la fonction

$$\psi(x, y).$$

Désormais donc, nous exigerons que la fonction $\psi(x, y)$ soit à la fois symétrique et paire en x, y, c'est-à-dire nous exigerons que l'on ait d'une part

$$\psi(x, y) = \psi(y, x)$$

et d'autre part

$$\psi(-x, y) = \psi(x, y), \quad \psi(x, -y) = \psi(x, y).$$

On pourra, si l'on veut, poser

$$\psi(x, y) = f(x, y) + f(y, x);$$

la condition de symétrie sera remplie d'elle-même, et il suffira que

$$f(x, y)$$

soit une fonction paire.

Pour toute fonction

$$\psi(x, y)$$

du genre indiqué, que cette fonction soit d'ailleurs algébrique ou numérique, on aura

$$S' = S + 4S_1,$$

ou bien, explicitement,

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}} \psi(d'-d'', \delta'+\delta'')$$

$$= \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d) + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2),$$

formule remarquable qu'on joindra, pour les compléter, à celles de nos premiers articles.

5. Nous appliquerons cette formule à quelques exemples. Et d'abord sans particulariser davantage la fonction $\psi(x, y)$, nous ferons successivement $m = 1$, puis $m = 3$.

Pour

$$m = 1,$$

l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2$$

est impossible; la somme

$$S_1$$

relative à ce mode de partition est donc nulle. Quant aux équations

$$m = d\delta$$

et

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elles n'ont évidemment lieu qu'en prenant l'unité pour valeur commune de

$$d, \ \delta, \ d', \ \delta', \ d'', \ \delta''.$$

De là

$$S = \psi(0, 2)$$

et

$$S' = \psi(0, 2).$$

L'équation

$$S' = S + 4S_1$$

est donc exacte.

Pour $m = 3$, l'équation

$$m = d\delta$$

donne $d = 3$, $\delta = 1$, ou bien $d = 1$, $\delta = 3$; par conséquent

$$S = \psi(0, 6) - \psi(0, 2).$$

L'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_1}d_2\delta_2$$

n'a lieu qu'avec

$$d_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad 2^{\alpha_1}d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1,$$

en sorte que

$$S_1 = \psi(2, 4).$$

Quant à l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elle comporte huit systèmes de solutions compris dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5, \\
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 5, & d'' = 1, & \delta'' = 1, \\
d' = 5, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 1.
\end{array}$$

La somme

$$S'$$

est donc composée de huit termes, savoir

$$\begin{gathered}\psi(0, 6)+\psi(-4, 2)-\psi(0, 6)+\psi(-2, 4)\\ +\psi(2, 4)-\psi(0, 2)+\psi(0, 6)+\psi(4, 2).\end{gathered}$$

Il y a trois termes dont la valeur absolue est $\psi(0, 6)$, qu'on prend deux fois positivement et une fois négativement; groupez-les avec le terme négatif où figure $\psi(0, 2)$: le total sera

$$\psi(0, 6)-\psi(0, 2),$$

c'est-à-dire précisément S. Quant aux autres termes

$$\psi(-4, 2), \quad \psi(-2, 4), \quad \psi(2, 4), \quad \psi(4, 2),$$

ils sont égaux entre eux et à $\psi(2, 4)$, c'est-à-dire à S_1, d'après la nature de la fonction $\psi(x, y)$, qui est à la fois symétrique et paire. On a donc bien

$$S'=S+4S_1.$$

6. Les conditions imposées à la fonction

$$\psi(x, y)$$

seront remplies si l'on suppose constamment

$$\psi(x, y)=1.$$

Alors notre formule générale deviendra

$$\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}}=\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}+4\sum(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}},$$

ou bien, en introduisant une notation qui nous est familière,

$$\sum\rho(m')\rho(m'')=\rho(m)+4\sum\rho(m_1)\rho(m_2).$$

On se souvient qu'un entier impair m étant mis de toutes les manières

possibles sous la forme

$$m = d\delta,$$

nous faisons

$$\rho(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

et que m', m'', m_1, m_2 sont aussi des entiers impairs liés à m par les deux équations

$$2m = m' + m'', \quad m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

C'est à ces équations que se rapportent les sommes indiquées dans la formule

$$\sum \rho(m') \rho(m'') = \rho(m) + 4 \sum \rho(m_1) \rho(m_2),$$

laquelle peut du reste être obtenue de plus d'une manière. Mais ici nous la déduisons immédiatement d'une formule très-étendue dont la démonstration élémentaire et directe est facile, circonstance dont nous pourrons ailleurs tirer parti.

7. On remplirait aussi les conditions imposées à la fonction

$$\psi(x, y)$$

en prenant

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2,$$

ou plus généralement

$$\psi(x, y) = x^{2\mu} + y^{2\mu},$$

l'entier μ étant quelconque.

On pourrait prendre également

$$\psi(x, y) = x^2 y^2,$$

ou encore

$$\psi(x, y) = x^{2\mu} y^{2\mu}.$$

Rien n'empêcherait d'introduire des fonctions trigonométriques, de faire par exemple, en désignant par t une constante arbitraire,

$$\psi(x, y) = \cos(xt) \cos(yt),$$

ou bien

$$\psi(x, y) = \cos(xt) + \cos(yt),$$

et ainsi de suite.

On peut obtenir de cette façon une infinité de formules particulières dont chacune aura sa valeur propre. Mais l'étude approfondie de tous ces détails doit être renvoyée à une autre circonstance. Nous n'avions pour objet, dans cet article, que de poser la formule

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}+\frac{d''-1}{2}} \psi(d'-d'', \delta'+\delta'')$$

$$= \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d) + 4\sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_1+1}d_2),$$

d'expliquer nettement la nature des éléments dont elle dépend, de faire sentir enfin qu'elle pourra être souvent utile. A cet égard, nous avons, je crois, dit tout ce qu'il fallait. Insistons cependant sur ce point que pourvu que la fonction

$$\psi(x, y)$$

satisfasse aux conditions que nous lui avons imposées pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui peuvent s'offrir dans notre formule, cette fonction sera du reste quelconque, soit algébrique, soit purement numérique. C'est une remarque applicable à toutes nos *formules générales*, mais que je ne crains pas de répéter parce qu'elle est vraiment fondamentale et parce qu'elle indique avec précision le caractère singulier de ces formules.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

où l'on prend pour x, y, z, t, u, v des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis nous introduirons la fonction

$$\rho_2(m)$$

définie comme exprimant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} d^2$$

qui porte sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Plus tard, nous aurons à considérer d'autres fonctions numériques; mais, dans la plupart des cas, on n'a besoin que de la fonction $\rho_2(m)$.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un nombre pair, ou du cas de $\alpha > 0$. On prouve sans peine que la valeur de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est alors égale à celle de

$$N(2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2v^2)$$

qui est connue d'après un article inséré au cahier d'août 1864. Nous sommes ainsi conduits à deux formules distinctes, l'une propre au cas de $\alpha = 1$, l'autre au cas de $\alpha > 1$.

Quand on suppose $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand on s'occupe d'un entier impairement pair, il vient

$$N(2m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8\rho_2(m).$$

Par exemple, on doit avoir

$$N(2 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8.$$

Or, des identités

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$2 = 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$2 = 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

on conclut qu'en effet l'entier 2 est susceptible de huit représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

L'équation

$$N(6 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 64,$$

qui s'offre ensuite, est vérifiée à son tour par les identités

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$6 = 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités fournit immédiatement seize représentations de l'entier 6, et chacune des trois autres en donne aussi seize, lorsqu'on y opère les permutations convenables. Or

$$16 + 3.16 = 64.$$

Mais quand il s'agit d'un entier pairement pair, c'est-à-dire du cas de

$$\alpha > 1,$$

l'on a

$$N(2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Par exemple

$$N(4 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 28,$$

résultat exact, comme le prouvent les identités

$$\begin{aligned}
4 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,
\end{aligned}$$

dont les trois premières comportent des permutations auxquelles il faut avoir égard. D'autres identités serviraient de même à constater l'exactitude de l'équation

$$N(12 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 288$$

que notre formule fournit. Je me dispense de les écrire.

5. Passons au cas d'un entier impair m, en sorte qu'il s'agisse de la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2).$$

On verra facilement que cette valeur est double de celle de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

que nous avons donnée dans le cahier de mars.

D'apres cela, si

$$m$$

est de la forme

$$4g+3,$$

on aura

$$\text{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m).$$

Par exemple,

$$\text{N}(3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 16,$$

résultat confirmé par les identités

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$3 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$3 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

dont chacune fournit quatre représentations de l'entier 3 par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

La formule

$$\text{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m)$$

reste même exacte pour un entier m de la forme $4g+1$, lorsque cet entier n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on en conclura que

$$\text{N}(21 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 768.$$

Mais en général il faut poser autant de fois qu'on le peut l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

l'entier i étant positif, tandis que s est indifféremment positif, nul ou négatif, compter le nombre

$$\rho(m)$$

des décompositions de m ainsi obtenues, et calculer la somme

$$\sum i^2.$$

Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Les deux derniers termes du second membre disparaissent d'eux-mêmes quand l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible et l'on retombe alors sur l'équation donnée plus haut.

Pour $m = 1$, il existe une seule décomposition, savoir

$$1 = 1^2 + 4.0^2.$$

On a donc alors

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = 1.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(1) = 1.$$

La formule

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m)$$

exige donc que

$$N(1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4.$$

Ce résultat est confirmé par les deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

Pour

$$m = 5,$$

on a deux décompositions exprimées par les équations

$$5 = 1^2 + 4.1^2$$

et

$$5 = 1^2 + 4(-1)^2,$$

en sorte qu'il vient cette fois

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(5) = 26.$$

Notre formule donne en conséquence

$$\mathrm{N}(5 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 40.$$

Or les identités

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

fournissent effectivement quarante représentations de l'entier 5, lorsqu'on y opère les permutations convenables.

Pour

$$m = 9,$$

on aurait

$$\rho(m) = 1,$$

puis

$$\sum i^2 = 9$$

et

$$\rho_2(m) = 73,$$

partant

$$\mathrm{N}(9 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 164;$$

mais je ne m'arrêterai pas à vérifier ce résultat.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

des représentations d'un entier donné n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

Pour répondre à cette question, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant un entier impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, puis nous introduirons, comme dans l'article précédent, la fonction

$$\rho_2(m),$$

ou

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

le signe sommatoire étant relatif aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

2. La fonction

$$\rho_2(m)$$

suffira toujours s'il s'agit d'un entier pair, c'est-à-dire si l'on suppose

$$\alpha > 0.$$

Considérons d'abord un entier impairement pair $2m$. La formule cherchée sera

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 24\rho_2(m).$$

Par exemple,

$$N(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 24,$$

résultat facile à vérifier au moyen de l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y effectuant les permutations convenables. Les deux identités

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

serviront de même à prouver que l'on a

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 192,$$

comme l'indique notre formule.

Qu'il s'agisse maintenant d'un entier pairement pair, en sorte que l'on ait

$$\alpha > 1.$$

La formule sera alors

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m$$

On a, par exemple,

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 28,$$

résultat confirmé par les trois identités

$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités fournit effectivement seize représentations de l'entier 4 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

La seconde en fournit huit et la troisième quatre, lorsqu'on a soin d'y opérer les permutations convenables. Or

$$16 + 8 + 4 = 28.$$

On vérifiera de même l'exactitude de l'équation

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 124,$$

au moyen des identités

$$8 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$8 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$8 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

dont les trois dernières comportent des permutations.

Pour

$$N(12 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v) = 288,$$

les identités à employer seraient

$$12 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$12 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2;$$

mais en voilà assez sur ce sujet.

5. Passons au cas d'un entier impair m, et d'abord admettons que l'on ait

$$m = 4g + 3.$$

La fonction $\rho_2(m)$ suffira encore, et il viendra

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 32,$$

résultat exact, comme il est aisé de s'en assurer.

Quand $m = 4g + 1$, on prouve facilement que la valeur demandée de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

vaut quatre fois celle de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

que nous avons donnée dans le cahier de mars. La formule

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m)$$

ne reste donc exacte alors qu'autant que m n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Mais en général il faudra tenir compte du nombre $\rho(m)$ des solutions de l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'on prendra comme d'ordinaire i positif, s positif, nul ou négatif. On devra aussi calculer la somme

$$\sum i^2:$$

Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m) + 8\sum i^2 - 4m\rho(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8,$$

résultat exact, comme le prouve l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

où l'on peut faire occuper à $(\pm 1)^2$ quatre places différentes. Cet exemple suffira, je crois.

SUR LA FORME
$x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ldots$) par la forme à six variables

$$x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2$$

exige aussi l'emploi de la fonction numérique

$$\rho_2(m),$$

c'est-à-dire de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Parcourons graduellement les divers cas qui peuvent se présenter au sujet du nombre demandé

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2),$$

et nous verrons qu'il n'y en a qu'un seul où la fonction $\rho_2(m)$ ne suffise pas sans l'adjonction d'autres fonctions numériques auxiliaires.

2. Le cas le plus simple est celui d'un entier impairement pair $2m$. On a

$$\mathrm{N}\,(2m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2) = 16\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{N}\,(2 = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2) = 16,$$

résultat confirmé par les identités

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2.$$

En y effectuant les permutations convenables, la première de ces identités fournit douze représentations de l'entier 2; la seconde en fournit quatre. Or

$$12 + 4 = 16.$$

Pour vérifier l'exactitude de l'équation

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 128,$$

que notre formule donne ensuite, on s'appuiera de la même manière sur les identités

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$6 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Eu égard aux permutations qu'elles comportent, la première et la seconde de ces identités fournissent chacune vingt-quatre représentations de l'entier 6 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2;$$

la troisième en fournit quarante-huit, et les deux dernières respectivement vingt-quatre et huit. Or

$$24 + 24 + 48 + 24 + 8 = 128.$$

5. Pour un entier pairement pair, c'est-à-dire pour le cas de

$$\alpha > 1,$$

la formule est

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\left[4^\alpha - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 60.$$

Ce résultat est confirmé par les identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont les deux premières comportent des permutations dont on doit tenir compte.

Notre formule donne encore

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 252,$$

puis

$$N(12 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 544;$$

mais je ne veux pas trop insister sur ces calculs.

4. Le cas de m impair se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 4g + 3$$

ou

$$m = 4g + 1.$$

Quand

$$m = 4g + 3,$$

on prouve aisément que

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 32.$$

C'est ce que confirment les identités

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités fournit immédiatement huit représentations de l'entier 3. La seconde, qui comporte des permutations, en fournit vingt-quatre. Or

$$8 + 24 = 32.$$

La formule

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m)$$

ne devient inexacte pour un entier m de la forme

$$4g + 1$$

que quand cet entier est décomposable en une somme de deux carrés. Alors il faut poser autant de fois qu'on le peut l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier i est supposé positif, tandis que l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif, compter le nombre

$$\rho(m)$$

des décompositions de m ainsi obtenues, enfin calculer la somme

$$\sum i^2$$

relative à leur ensemble. Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Les deux derniers termes disparaissent d'eux-mêmes quand l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible, et l'on retombe alors sur la formule donnée plus haut.

Mais pour

$$m = 1,$$

par exemple, il faut avoir égard à l'équation

$$1 = 1^2 + 4.0^2,$$

en vertu de laquelle

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = 1.$$

Comme d'un autre côté

$$\rho_2(1) = 1,$$

on devra avoir

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 6.$$

C'est ce que confirme l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$

où l'on peut faire occuper à

$$(\pm 1)^2$$

trois places distinctes.

Soit encore

$$m = 5.$$

On aura les deux décompositions

$$5 = 1^2 + 4.1^2$$

et

$$5 = 1^2 + 4(-1)^2,$$

desquelles on conclura, pour cette valeur de m,

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(5) = 26.$$

Notre formule donnera donc

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 92.$$

Les identités à employer pour vérifier ce résultat sont

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

En ayant égard aux permutations qu'elles comportent, on tire de la première de ces identités vingt-quatre représentations de l'entier 5, trente-deux de la seconde, vingt-quatre de la troisième, huit de la quatrième. Or

$$24 + 32 + 24 + 12 = 92.$$

Je ne pense pas qu'on désire d'autres exemples.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2,$$

dont je veux m'occuper maintenant, se rattache à celles que nous venons d'étudier. Aussi, pour déterminer le nombre

$$N\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2\right)$$

des représentations qu'elle offre concernant chaque entier donné $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$), on aura surtout à se servir de la fonction

$$\rho_2(m),$$

c'est-à-dire de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Examinons successivement tous les cas qui peuvent se présenter.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impairement pair $2m$. On aura

$$N\left(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2\right) = 40\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N\left(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2\right) = 40.$$

Ce résultat est confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$

dont le second membre comporte dix permutations.

L'équation

$$\mathrm{N}(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 320,$$

que notre formule donne ensuite, est vérifiée à son tour par les deux identités

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2$$

En y opérant les permutations convenables, la première fournit deux cent quarante représentations de l'entier 6 sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2;$$

la seconde en fournit quatre-vingts. Or

$$240 + 80 = 320.$$

5. Occupons-nous en second lieu du cas d'un entier pairement pair, c'est-à-dire du cas de

$$\alpha > 1.$$

La formule sera alors

$$\mathrm{N}(2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 4\left[3.2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2\, m.$$

Elle diffère beaucoup de celle qui convient à un entier impairement pair, et la valeur de m (mod. 4) y joue un rôle. Vérifions-la sur quelques exemples.

Elle donne d'abord

$$\mathrm{N}(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 92.$$

Or on a les trois identités

$$4 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1) + 0^2 + 4.0^2.$$

La première ne fournit que deux représentations de l'entier 4. Les

autres, qui comportent des permutations, donnent respectivement dix et quatre-vingts représentations. D'ailleurs

$$2 + 10 + 80 = 92.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

On trouve ensuite

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 380.$$

La vérification résulte cette fois des identités

$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$8 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$8 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$8 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4.0^2,$$

où l'on opérera les permutations convenables. De la première on tirera quarante représentations pour l'entier 8, vingt de la seconde, cent soixante de chacune des deux dernières. Or

$$40 + 20 + 160 + 160 = 380.$$

Il n'est pas plus difficile de s'assurer de l'exactitude de l'équation

$$N(12 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 800$$

Les identités à employer pour cela sont

$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$12 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Chacune des deux premières donne quatre-vingts représentations de l'entier 12, chacune des deux dernières en donne trois cent vingt; or

$$80 + 80 + 320 + 320 = 800.$$

4. Le cas de $\alpha = 0$, ou d'un entier impair m, se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 4g + 3$$

ou

$$m = 4g + 1.$$

Quand

$$m = 4g + 3,$$

on obtient aisément la formule cherchée, savoir

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 10\rho_2(m).$$

Cette formule donne, par exemple,

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 80,$$

résultat confirmé par l'identité

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$

qui comporte dix permutations fournissant chacune huit représentations.

Elle donne encore

$$N(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 480.$$

Ici on a les identités

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4.0^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui toutes deux sont susceptibles de permutations. On tire de la première trois cent vingt représentations de l'entier 7; la seconde en donne cent soixante. Or

$$320 + 160 = 480.$$

5. Soit enfin

$$m = 4g + 1.$$

Pour trouver alors la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2),$$

il faudra non-seulement employer la fonction

$$\rho_2(m),$$

mais encore considérer l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où nous supposons l'entier i positif, l'entier s positif, nul ou négatif: on comptera le nombre

$$\rho(m)$$

des solutions de cette équation et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

pour toutes les solutions. Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m) + 8\sum i^2 - 4m\rho(m).$$

Cette formule se simplifie quand l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible; les deux derniers termes du second membre disparaissant alors d'eux-mêmes, il reste seulement

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on en conclura que

$$N(21 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 2304.$$

Mais pour $m=1$, $m=5$, $m=9$, etc., c'est à la formule

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2)=6\rho_2(m)+8\sum i^2-4m\rho(m)$$

qu'il faudra avoir recours.

A cause de l'équation

$$1=1^2+4\,0^2.$$

cette formule donne

$$N(1=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2)=10.$$

Or ce résultat est confirmé par l'identité

$$1=(\pm 1)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+4.0^2$$

dans laquelle on peut faire occuper à

$$(\pm 1)^2$$

cinq places différentes.

Les équations

$$5=1^2+4.1^2,\quad 5=1^2+4(-1)^2$$

montrent ensuite que, pour $m=5$, on a

$$\rho(m)=2$$

et

$$\sum i^2=2;$$

d'ailleurs

$$\rho_2(5)=26.$$

On doit donc avoir

$$N(5=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2)=132,$$

résultat facile à vérifier au moyen des identités

$$5=(\pm 1)^2+(\pm 2)^2+0^2+0^2+0^2+4.0^2,$$
$$5=(\pm 1)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+4(\pm 1)^2,$$
$$5=(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+4.0^2$$

dont les deux premières comportent des permutations. La dernière donne immédiatement trente-deux représentations de l'entier 5 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2;$$

les deux autres en fournissent respectivement vingt et quatre-vingts. Or

$$32 + 20 + 80 = 132.$$

L'équation

$$9 = 3^2 + 4.0^2$$

servira de même dans la recherche de

$$N(9 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2);$$

mais voilà bien assez de calculs numériques.

6. Terminons par une remarque qui porte sur tous les articles insérés dans les trois premières feuilles de ce cahier et dans les deux premières feuilles du cahier de mars. Ces articles sont intimement liés entre eux. Partout on y rencontre la fonction

$$\rho_2(m).$$

De plus, quand il s'agit d'un entier $m \equiv 1 \pmod{4}$, on y trouve employées deux autres fonctions,

$$\rho(m)$$

et

$$\sum i^2,$$

relatives à l'équation en nombres entiers

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où i est positif, s positif, nul ou négatif. Mais ces deux dernières fonctions ne sont point isolées l'une de l'autre dans nos formules, elles n'y jouent point un rôle indépendant, elles n'y figurent que par la différence

$$2\sum i^2 - m\rho(m),$$

en sorte que si l'on désignait cette différence par

$$\varpi(m),$$

on n'aurait plus à considérer que $\rho_2(m)$ et $\varpi(m)$.

La différence dont il s'agit pourrait d'ailleurs être remplacée par celle-ci

$$\sum i^2 - 4\sum s^2,$$

qui peut aussi s'écrire

$$\sum(i^2 - 4s^2).$$

Mais voici une autre expression qui mérite surtout qu'on en dise un mot. Posons de toutes les manières possibles

$$2m = j^2 + j'^2,$$

j et j' désignant des entiers impairs et positifs. Je trouve que la somme

$$\sum(-1)^{\frac{jj'-1}{2}} jj'$$

est parfaitement équivalente à la différence

$$2\sum i^2 - m\rho(m)$$

et peut conséquemment la remplacer.

Par exemple, au lieu de la formule

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m) + 8\sum i^2 - 4m\rho(m)$$

que nous venons de donner au n° 5, nous aurions pu donner celle-ci :

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m) + 4\sum(-1)^{\frac{jj'-1}{2}} jj'.$$

En modifiant de cette façon nos formules, on gagnerait sans doute quant à l'élégance ; mais on perdrait, je crois, quant à la facilité du calcul. Au lecteur à décider.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIX-HUITIÈME ARTICLE.

1. Ce dix-huitième article pourra être convenablement rapproché du dix-septième, inséré au cahier d'avril. On continue, en effet, à considérer un nombre impair donné

$$m,$$

et les modes de partition qu'on applique, tant au nombre m qu'à son double, restent les mêmes. Mais les sommes qu'on en déduit et qu'on parvient à lier entre elles sont différentes.

Représentons-nous d'abord l'entier impairement pair $2m$ comme la somme de deux entiers positifs impairs m', m'', c'est-à-dire écrivons

$$2m = m' + m'',$$

m' prenant les valeurs successives

$$1, 3, \ldots, 2m-3, 2m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires

$$2m-1, 2m-3, \ldots, 3, 1;$$

puis, décomposons de toutes les manières possibles chacun des entiers m', m'' en un produit de deux facteurs, de manière à avoir

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta''.$$

Nous arriverons ainsi à l'équation fondamentale

$$2m = d'\delta' + d''\delta''.$$

De cette équation dérive la somme

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \left[\mathfrak{F}(d'+d'', \delta'-\delta'') + \mathfrak{F}(d'-d'', \delta'+\delta'') \right]$$

que nous désignerons, pour abréger, par

$$R'$$

et qui est une de celles dont nous voulons nous occuper. Le signe sommatoire

$$\sum$$

porte sur tous les groupes d'entiers positifs impairs

$$d', \delta', d'', \delta''$$

pour lesquels on a

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

conformément à ce que je viens d'expliquer.

Nous aurions pu diviser la somme R' en deux parties, savoir

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \mathfrak{F}(d'+d'', \delta'-\delta'')$$

et

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \mathfrak{F}(d'-d'', \delta'+\delta''),$$

dont la première aurait pu, en outre, être remplacée par

$$\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \mathfrak{F}(\delta'+\delta'', d'-d'').$$

Ces changements de forme ont leur utilité; mais nous avons dû fixer les idées en choisissant une expression précise qui pour le moment suffit.

Une fonction

$$\mathfrak{F}(x, y)$$

de deux variables figure dans la somme

$$R'.$$

Cette fonction est jusqu'ici complétement arbitraire; mais plus tard nous l'assujettirons à quelques conditions qui seront mentionnées en temps utile.

2. Il faut maintenant se représenter le nombre m comme formé de deux parties entières et positives, l'une impaire, l'autre paire, et poser

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

On fera successivement

$$m_1 = 1, \quad m_1 = 3, \ldots, \quad m_1 = m - 2;$$

et à chaque valeur de m_1 correspondra une valeur du produit pair $2^{\alpha_2} m_2$, où le facteur m_2 est supposé impair. Cette valeur

$$2^{\alpha_2} m_2 = m - m_1$$

déterminera à la fois les deux facteurs 2^{α_2} et m_2 : l'exposant α_2 variera d'un cas à l'autre.

Soit enfin, de toutes les manières possibles en nombres entiers positifs,

$$m_1 = d_1 \delta_1, \quad m_2 = d_2 \delta_2,$$

et nous serons conduits à l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2,$$

d'où nous conclurons la somme nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

que je désignerai, pour abréger, par

$$R_1.$$

La fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ est la même que plus haut.

3. C'est entre la somme

$$R'$$

du n° **1** et la somme

$$R_1$$

du n° **2** que nous établissons une liaison par l'intermédiaire d'une troisième somme relative aux diviseurs de l'entier donné m.

Soit d un quelconque des diviseurs de m (dont 1 et m font toujours partie). La somme dont nous parlons, et que nous désignerons abréviativement par

$$R$$

s'exprimera de cette façon :

$$\sum \mathfrak{F}(2d, 0).$$

Je n'ai pas besoin d'ajouter que le signe

$$\sum$$

porte sur toutes les valeurs de d.

Mais le moment est venu de dire quelles restrictions nous imposons à la généralité absolue de la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y);$$

car la relation que nous voulons obtenir n'aurait pas lieu pour une fonction quelconque. Désormais donc nous exigeons que cette fonction soit paire par rapport à y, et impaire par rapport à x; autrement dit, nous exigeons que l'on ait d'une part

$$\mathfrak{F}(x, -y) = \mathfrak{F}(x, y),$$

et d'autre part

$$\mathfrak{F}(-x, y) = -\mathfrak{F}(x, y),$$

à quoi j'ajoute, comme d'habitude, la condition particulière

$$\mathcal{F}(0, y) = 0.$$

Pour toute fonction algébrique ou numérique remplissant ces conditions, l'on a

$$R' = R + 4R_1,$$

ou bien, explicitement,

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [\mathcal{F}(d'+d'', \delta'-\delta'') + \mathcal{F}(d'-d'', \delta'+\delta'')]$$
$$= \sum \mathcal{F}(2d, 0) + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} \mathcal{F}(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2).$$

Telle est la formule, curieuse suivant nous, à laquelle j'ai consacré le présent article.

4. Pour $m = 1$, l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2$$

est impossible; la somme

$$R_1$$

relative à ce mode de partition est donc nulle. D'un autre côté, on ne peut faire

$$m = d\delta,$$

qu'avec

$$d = 1, \quad \delta = 1.$$

Enfin, l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta''$$

n'a évidemment lieu qu'en prenant l'unité pour valeur commune de

$$d', \ \delta', \ d'', \ \delta''.$$

De là

$$R = \mathcal{F}(2, 0),$$

et

$$R' = \mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(0, 2),$$

ce qui se réduit à

$$R' = \mathfrak{F}(2, 0),$$

attendu que le terme $\mathfrak{F}(0, 2)$ est nul d'après la nature de la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$. L'équation

$$R' = R + 4R_1$$

est donc vérifiée.

Pour $m = 3$, on a $m = d\delta$ par $d = 1$, $\delta = 3$ et par $d = 3$, $\delta = 1$; d'où

$$R = \mathfrak{F}(2, 0) + \mathfrak{F}(6, 0).$$

L'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2$$

a lieu alors en faisant

$$d_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad 2^{\alpha_2} d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1;$$

par conséquent

$$R_1 = \mathfrak{F}(2, 4).$$

Quant à l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elle comporte huit systèmes de solutions compris dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5, \\
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 5, & d'' = 1, & \delta'' = 1, \\
d' = 5, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 1.
\end{array}$$

La somme

$$R'$$

est donc composée de seize termes, savoir :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F}(2, -4) + \mathfrak{F}(0, 6) + \mathfrak{F}(6, 0) + \mathfrak{F}(-4, 2) \\
&+ \mathfrak{F}(2, 0) + \mathfrak{F}(0, 6) - \mathfrak{F}(4, 2) - \mathfrak{F}(-2, 4) \\
&+ \mathfrak{F}(4, -2) + \mathfrak{F}(2, 4) - \mathfrak{F}(6, 0) - \mathfrak{F}(0, 2) \\
&+ \mathfrak{F}(2, 4) + \mathfrak{F}(0, 6) + \mathfrak{F}(6, 0) + \mathfrak{F}(4, 2).
\end{aligned}$$

Quatre termes sont nuls à cause de l'équation de condition

$$\mathcal{F}(0, y) = 0.$$

Quatre autres

$$\mathcal{F}(-4, 2),\ -\mathcal{F}(4, 2),\ \mathcal{F}(4, -2),\ \mathcal{F}(4, 2)$$

se détruisent entre eux, attendu que l'on doit avoir

$$\mathcal{F}(-4, 2) = -\mathcal{F}(4, 2), \quad \mathcal{F}(4, -2) = \mathcal{F}(4, 2).$$

Deux autres termes, le troisième et le onzième, se détruisent identiquement. Restent six termes dont deux forment la somme

$$\mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(6, 0),$$

c'est-à-dire la valeur de R. Les quatre autres

$$\mathcal{F}(2, -4),\ -\mathcal{F}(-2, 4),\ \mathcal{F}(2, 4),\ \mathcal{F}(2, 4)$$

ont pour valeur commune $\mathcal{F}(2, 4)$, puisque l'on doit avoir

$$\mathcal{F}(2, -4) = \mathcal{F}(2, 4), \quad \mathcal{F}(-2, 4) = -\mathcal{F}(2, 4).$$

Ils donnent donc pour total

$$4\mathcal{F}(2, 4),$$

c'est-à-dire $4R_1$. Ainsi on a cette fois encore

$$R' = R + 4R_1.$$

5. On remplira évidemment les conditions imposées à la fonction $\mathcal{F}(x, y)$ en posant

$$\mathcal{F}(x, y) = x.$$

Notre formule donne donc

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} d' = \sum d + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} d_1.$$

Pour former la somme placée au premier membre, il faut la considérer comme une somme triple, et se rappeler nos équations du n° **1** :

$$2m = m' + m'', \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

puis désigner, d'après une notation qui nous est habituelle, par

$$\rho(m'')$$

la somme des valeurs de

$$(-1)^{\frac{d''-1}{2}}$$

pour les diviseurs d'' de m'', et par

$$\zeta_1(m')$$

la somme des diviseurs d' de m'. Le premier membre pourra s'écrire alors

$$\sum \zeta_1(m')\rho(m''),$$

le signe sommatoire portant maintenant sur tous les groupes m', m''. On opérera d'une manière semblable pour le second membre, en se rappelant nos équations du n° **2** :

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2, \quad m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2;$$

et l'on arrivera à la formule

$$\sum \zeta_1(m')\rho(m'') = \zeta_1(m) + 4\sum \zeta_1(m_1)\rho(m_2).$$

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire de développer ici d'autres exemples et je me borne à indiquer celui de

$$\mathfrak{F}(x, y) = \sin(xt)\cos(yz),$$

t et z étant des constantes arbitraires.

CLASSIFICATIONS

des permutations d'un nombre quelconque de lettres en groupes de permutations inséparables;

Par M. DESPEYROUS.

Nous avons démontré [*] que la solution du problème proposé par l'Institut en 1858 pour sujet du grand prix des Sciences mathématiques et non encore résolu, « *trouver tous les nombres s de valeurs distinctes que prennent les fonctions de m variables par les permutations de ces variables,* » se ramenait à la solution de cet autre : trouver toutes les manières possibles de classer les permutations de m lettres en s groupes composés chacun d'un même nombre de permutations associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.

Ce résultat donne de l'importance aux classifications des permutations d'un nombre quelconque de lettres en groupes de permutations *inséparables* pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment : classifications utiles d'ailleurs à la solution de cette question, *trouver toutes les équations résolubles algébriquement,* comme nous le montrerons bientôt.

Nous nous sommes occupé déjà de ces classifications, nous en avons fait connaître trois [**] : mais il en existe un plus grand nombre. Et

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, février 1865. Cet article et celui que je publie aujourd'hui formaient le Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 7 juillet 1862. *Voir* les *Comptes rendus*, t. LV, p. 45.

[**] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, décembre 1861. Ce premier Mémoire est la base de tout mon travail et en fixe la date. Il a été lu à la réunion des Sociétés savantes le 24 novembre 1861 ; je n'ai fait depuis lors que développer les résultats qui y sont annoncés.

nous démontrons l'existence de sept classifications distinctes, *quand on opère sur toutes les lettres,* les trois premières comprises et reproduites dans ce nouveau travail avec de légères modifications. L'une d'elles, la septième, contient un très-grand nombre de classifications en raison des indéterminées qu'elle renferme; et ce nombre croît rapidement à mesure que le nombre de lettres augmente, surtout quand ce nombre est composé de plusieurs facteurs premiers.

Toutes ces classifications sont entièrement fondées sur la théorie de l'ordre; c'est pourquoi la lecture de notre travail suppose celle de notre Mémoire déjà cité.

Cauchy a eu l'heureuse idée de distinguer les fonctions en fonctions *intransitives* et en fonctions *transitives*. Une fonction de m lettres est dite transitive lorsque, sans altérer cette fonction, on peut faire occuper à une lettre quelconque telle place que l'on veut, pourvu qu'on déplace convenablement toutes les autres. Généralement, une fonction de m lettres est dite k fois transitive lorsque, sans altérer cette fonction, on peut faire occuper à k lettres quelconques telles places que l'on veut, pourvu qu'on déplace convenablement toutes les autres. Une fonction non transitive est dite *intransitive*.

Cet illustre géomètre fait dépendre la solution de la question proposée par l'Institut de la détermination des nombres de valeurs distinctes des fonctions transitives, détermination qui est loin d'être complète malgré les travaux récents sur cette matière. Nous avons suivi une marche inverse : nous commençons par déterminer les nombres de valeurs distinctes des fonctions *intransitives*. Et toutes les classifications dont il est question dans notre travail ne produisent généralement que des fonctions intransitives.

Or, nous démontrons qu'il y a six classifications de cette espèce, ainsi qu'une septième très-générale et composée des premières. Mais en existe-t-il un plus grand nombre? Question importante; car la détermination complète de ces classifications donnerait, d'après ce que nous avons démontré, *tous* les nombres qui expriment combien de valeurs distinctes prennent les fonctions intransitives. Et pour la solution complète de la question proposée par l'Académie des Sciences, il n'y aurait plus qu'à ramener les fonctions transitives aux fonctions intransitives.

I.

CLASSIFICATIONS.

Première classification. — Considérons un nombre quelconque m de lettres $a, b, c, \ldots, k, l$; et désignons par μ le nombre total de permutations qu'elles produisent, μ étant déterminé par l'équation

$$\mu = 1.2.3\ldots(m-1)m.$$

Parmi ces permutations, prenons toutes celles qui commencent par une même lettre, a par exemple. Pour les obtenir, il suffira de permuter les $m-1$ lettres $b, c, \ldots, k, l$, et d'écrire au commencement de chacune d'elles cette lettre a. Le nombre de ces permutations ainsi obtenues sera égal au produit $1.2.3\ldots(m-1)$, et elles constituent ce que nous appellerons dans la suite la *première classe*. Considérons l'une d'elles, $abc\ldots kl$ par exemple, et joignons à cette permutation toutes celles qui sont relatives aux polygones de Poinsot, c'est-à-dire toutes celles qu'on déduit de cette permutation en prenant successivement les lettres, à partir de la première, de p_1 en p_1, de p_2 en $p_2, \ldots$, de p_ν en p_ν; $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ étant les ν nombres inférieurs et premiers à m. On obtiendra ainsi un premier groupe de ν [*] permutations, la première comprise,

$$abc\ldots kl,\quad adh\ldots ig, \ldots.$$

Supprimons ces ν permutations dans la première classe, et prenons parmi celles qui restent une permutation quelconque, $ahg\ldots ci$ par exemple. Nous ferons sur elle ce que nous avons fait sur la première $abc\ldots kl$; c'est-à-dire que nous prendrons successivement les lettres de cette nouvelle permutation, à partir de la première a, de p_1 en p_1, de p_2 en $p_2, \ldots$, de p_ν en p_ν, et nous obtiendrons un deuxième groupe de ν *nouvelles* permutations

$$ahg\ldots ci,\quad afl\ldots he, \ldots.$$

---

[*] Si $m = p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda$, on sait que

$$\nu = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} \ldots t^{\lambda-1}.(p-1)(q-1)\ldots(t-1).$$

Je dis nouvelles : car si on considère une quelconque des permutations du premier ou du deuxième groupe, et si on fait sur elle les mêmes opérations qui ont été faites sur la première, on reproduira toutes celles du premier ou du deuxième groupe [*]. Donc, si l'une des permutations du second groupe coïncidait avec l'une de celles du premier, ces deux groupes seraient composés des *mêmes* permutations. Ce qui est impossible, puisqu'on a pris, pour former ce deuxième groupe, une permutation différente de celles du premier.

Otons ces ν nouvelles permutations de toutes celles que nous avions après la première suppression; prenons parmi celles qui restent une permutation quelconque, *ald...ef* par exemple, et faisons sur elle ce que nous avons fait sur chacune des deux premières; nous obtiendrons ainsi un troisième groupe de ν permutations

$$ald\ldots ef,\ a\ldots,\ \ldots;$$

et nous démontrerions de la même manière que ces permutations sont différentes de celles du premier et du deuxième groupe. En continuant ainsi cette même opération, on finira par épuiser les $1.2.3\ldots(m-1)$ permutations de la première classe : puisque chaque nouvelle permutation, différente de celles des groupes déjà formés, produit ν permutations de la même classe essentiellement différentes de celles qui forment ces groupes.

Cette première classe de permutations est donc partagée en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes formés chacun de ν permutations, ainsi qu'il suit :

$$1^{\text{re}}\ \text{classe.}\ \begin{cases} abc\ldots kl, & adh\ldots ig, & \ldots, \\ ahg\ldots ci, & afl\ldots he, & \ldots, \\ ald\ldots ef, & a\ldots, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$$

On pourrait actuellement prendre les $1.2.3\ldots(m-1)$ permutations d'une autre classe, c'est-à-dire toutes celles qui commencent par une

[*] *Voir* le théorème de la Note placée à la fin de ce travail.

même lettre différente de a, b par exemple, et établir sur elles la même classification qu'on vient de faire sur celles de la première classe. Mais on arrivera au même résultat, et d'une manière plus simple, si on écrit les permutations du tableau précédent, ligne par ligne et dans le même ordre, en commençant chacune d'elles par cette lettre b et en marchant toujours dans le même sens, de gauche à droite : car il est évident qu'en faisant ainsi l'on obtient respectivement les *mêmes* polygones étoilés de Poinsot lus à partir du même sommet b. On aura ainsi partagé les permutations de la deuxième classe en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes composés chacun de ν permutations:

$$2^{\text{e}}\text{ classe}\left\{\begin{array}{l} b\ldots,\ b\ldots,\ \ldots, \\ b\ldots,\ b\ldots,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Par la même raison, si on écrit les permutations de la première classe ligne par ligne et dans le même ordre, en commençant chacune d'elles par la lettre c, on aura également partagé les $1.2.3\ldots(m-1)$ de la troisième classe en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes composés chacun de ν permutations relatives aux polygones étoilés de Poinsot, et qui correspondront aux *mêmes* polygones de la première classe lus à partir du même sommet c.

En continuant cette même opération jusqu'à l'entier épuisement des m lettres données, toutes les permutations de ces lettres seront partagées en m classes, et chaque classe en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes de ν permutations chacun. Telle est la loi de formation de la première classification.

Première classification.

$$1^{\text{re}}\text{ classe}\left\{\begin{array}{l} abc\ldots kl,\ adh\ldots ig,\ \ldots, \\ ahg\ldots ci,\ afl\ldots he,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$2^e \text{ classe} \begin{cases} bc\ldots,\ bd\ldots,\ \ldots. \\ be\ldots,\ bg\ldots,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m^{\text{ième}} \text{ classe} \begin{cases} lg\ldots,\ lb\ldots,\ \ldots. \\ lk\ldots,\ ld\ldots,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le nombre s des groupes de cette classification est évidemment donné par la formule

$$(1) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu}.$$

Cette classification ne produira qu'un seul et même tableau, de quelque manière qu'on s'y prenne pour la former; puisque (*voir* la Note), d'une permutation quelconque de chaque groupe du tableau précédent, on ne peut déduire, par le procédé de l'intervalle constant, que les permutations de ce groupe.

Deuxième classification. — Dans le tableau qui précède, réunissons en un seul groupe tous ceux d'une même classe, et faisons la même chose pour chaque classe; nous obtiendrons une nouvelle classification de m lettres composée de m groupes formés chacun de $1.2.3\ldots(m-1)$ permutations.

Deuxième classification.

$$\begin{array}{l} ab\ldots,\ ak\ldots,\ \ldots. \\ bh\ldots,\ be\ldots,\ \ldots. \\ cg\ldots,\ cf\ldots,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ li\ldots,\ la\ldots,\ \ldots, \end{array}$$

le nombre s des groupes de cette classification étant donné par la

formule

$$(2) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Il est clair que chaque groupe se compose des permutations qui commencent par une même lettre suivies des permutations des $m-1$ autres, et que cette classification ne peut être faite que d'une seule manière.

Troisième classification. — Prenons les premiers groupes de chacune des m classes de la première classification, et formons un nouveau groupe de ces $m.\nu$ permutations,

$$abc,\ldots kl,\ adh\ldots ig\ldots,\ \ldots,\ bc\ldots,\ bd\ldots,\ \ldots,\ lg\ldots,\ lb\ldots,\ \ldots.$$

Prenons de même les seconds groupes de chacune des m classes de la même classification, et formons un nouveau groupe de ces $m.\nu$ permutations,

$$ahg\ldots ci,\ afl\ldots he,\ \ldots,\ be\ldots,\ bg\ldots,\ \ldots,\ lk\ldots,\ ld\ldots,\ \ldots.$$

Prenons encore les troisièmes groupes de chacune des m classes de cette même classification, et formons un troisième groupe de ces $m.\nu$ permutations : et continuons ainsi cette même opération jusqu'à ce qu'on ait épuisé les groupes de chaque classe. Nous obtiendrons une troisième classification.

Troisième classification.

$$\begin{array}{l} abc\ldots kl,\ adh\ldots ig,\ \ldots,\ bc\ldots,\ bd\ldots,\ \ldots,\ lg\ldots,\ lb\ldots,\ \ldots,\\ ahg\ldots ci,\ afl\ldots he,\ \ldots,\ be\ldots,\ bg\ldots.\ \ldots,\ lk\ldots,\ ld\ldots,\ \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

composée d'un nombre s de groupes marqué par la formule

$$(3) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu},$$

formés chacun de $m.\nu$ permutations assujetties à une même loi de

formation, savoir : de ν permutations relatives aux polygones étoilés de Poinsot et déduites d'une permutation quelconque, et des $(m-1)\nu$ permutations qu'on en déduit par le procédé *circulaire* [*] effectué sur chacune des ν premières.

Comme pour les deux premières classifications, cette troisième ne produira qu'un seul et même tableau, de quelque manière qu'on la forme. Cela résulte évidemment de ce qui a été démontré dans la première classification.

Quatrième classification. — Examinons maintenant si les ν permutations, qui forment chacun des groupes de la première classification, ne pourraient pas être subdivisées en sous-groupes par une même loi de formation. A cet effet, considérons les ν polygones de m côtés qui correspondent aux ν permutations d'un de ses groupes, du premier par exemple; polygones qui se déduisent du polygone $abc\ldots kl$ en prenant successivement les sommets, à partir du sommet a, de p_1 en p_1, puis de p_2 en $p_2, \ldots$, et enfin de p_ν en p_ν; $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ étant les ν nombres inférieurs et premiers à m.

Considérons d'abord le premier polygone $abc\ldots kl$, et puis l'un des $\nu - 1$ autres, celui qui correspond à p_i par exemple. De ce second polygone tirons-en un troisième en sautant, à partir du sommet a, de p_i en p_i. Ce troisième polygone sera également de m côtés puisque p_i est premier à m; et de celui-ci tirons-en, par la même loi, un quatrième en sautant de p_i en p_i; et continuons ainsi, jusqu'à ce qu'on retombe sur le polygone de départ $abc\ldots kl$. Nous retrouverons un certain nombre ν' des ν premiers polygones, le premier compris. Car marcher dans le polygone $abc\ldots kl$, d'abord de p_i en p_i, puis dans le polygone produit de p_i en p_i, et ainsi de suite; ce procédé revient évidemment à marcher dans le premier polygone, d'abord de p_i en p_i, puis de p_i^2

[*] Considérons une des permutations des m lettres, $abc\ldots kl$ par exemple; plaçons ces lettres dans cette disposition sur une circonférence de cercle de rayon arbitraire, et lisons ces lettres dans l'ordre où elles sont écrites à partir de b : la permutation obtenue $bc\ldots kla$ est dite *permutation circulaire de la première*. En les lisant successivement, à partir de c, $d, \ldots, l$ et dans le même sens, on obtiendra $m-2$ autres permutations circulaires.

en $p_i^2, \ldots$, et enfin de $p_i^{\nu'}$ en $p_i^{\nu'}$: et comme p_i est premier à m, les puissances p_i^2, $p_i^3, \ldots$, $p_i^{\nu'}$ sont aussi premières à m, et les résidus à m de chacune d'elles sont également premiers à m. Donc ces ν' polygones se trouvent parmi les ν premiers.

Or, de deux choses l'une, ou ces ν' polygones feront tous les ν premiers ou n'en feront qu'une partie. Dans le premier cas, le nombre p_i ne produit rien de nouveau, et p_i est racine *primitive* de m; dans le second cas, je dis que ν' est un diviseur de ν.

Car parmi les ν polygones prenons-en un qui ne soit pas compris dans le groupe des ν' formés comme il vient d'être dit, et déduisons de ce polygone par la même loi et avec le même nombre p_i un nouveau groupe de ν' polygones. Ces nouveaux polygones, qui, d'après ce qui précède, font partie du même groupe des ν premiers polygones, seront différents des ν' formés précédemment. Car si un seul polygone du second groupe coïncidait avec l'un des ν' premiers, comme on déduit toujours par la même loi, le second groupe des ν' polygones coïnciderait tout entier avec le premier; ce qui est impossible, puisqu'on part, pour former le second groupe des ν' polygones, d'un polygone qui n'est pas compris dans le premier.

Si après avoir ôté des ν polygones, qui forment le premier groupe de la première classification, les deux groupes que nous venons de former et qui se composent chacun de ν' polygones, il en reste encore; on démontrerait de la même manière qu'on formerait un troisième groupe de ν' polygones différents de ceux des deux premiers, et appartenant encore au premier groupe total; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en restât plus dans ce groupe total de ν polygones. Donc ν' est un diviseur de ν, soit $\nu' = \frac{\nu}{\theta}$.

Cela étant, formons un groupe des ν' permutations relatives aux ν' premiers polygones produits par p_i et que nous appellerons dorénavant *sous-groupe;* formons un nouveau sous-groupe des ν' permutations relatives aux ν' seconds polygones produits par le même nombre p_i, et ainsi de suite. Nous subdiviserons, de cette manière, les ν permutations du premier groupe de la première classification en θ sous-groupes composés chacun de ν' permutations.

De chacun des groupes de la première classe de la même classifica-

tion nous déduirons, par le même procédé et avec le même nombre p_i, θ nouveaux sous-groupes. Cela fait, nous déduirons de ces sous-groupes ainsi formés, par des permutations circulaires, de nouveaux sous-groupes composés chacun de ν' permutations : et par ce moyen les μ permutations qu'offrent les m lettres se trouveront partagées en un nombre s de groupes, appelés sous-groupes, déterminé par la formule

$$(4) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu}.\theta,$$

composés chacun de $\frac{\nu}{\theta}$ permutations. Telle est la loi de formation de la quatrième classification.

Le nombre p_i étant un des nombres inférieurs et premiers à m, les résidus à m de toutes les puissances de p_i reviennent périodiquement les mêmes. On ne pourra donc, avec ce nombre p_i et en suivant la marche précédente, décomposer que d'une seule manière les ν permutations de chacun des groupes de la première classification en θ groupes composés chacun de ν' permutations. Il résulte de là que chacun des nombres inférieurs et premiers à m produira une seule classification de cette quatrième espèce, quelle que soit la manière dont on s'y prenne pour la former.

Remarque I. — Le nombre θ étant relatif à p_i, il faudra, dans les applications, prendre les valeurs de θ relatives à chacun des ν nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$.

Remarque II. — Si m a des racines *primitives* et si p_i est l'une d'elles, $\nu' = \nu$, $\theta = 1$; et, par suite, cette formule (4) coïncide avec la formule (1).

Remarque III. — En réunissant en un seul groupe *tous* les sous-groupes de chacune des m classes, on retrouverait la deuxième classification, qui a été déduite de la première en réunissant en un seul groupe *tous* ceux de chacune des m classes.

Cinquième classification. — Cette classification se déduit de la précédente suivant la même loi que la troisième se déduit de la première.

Nous prendrons donc les premiers sous-groupes de chacune des m classes de cette quatrième classification, et nous formerons de ces $m\nu'$ permutations un nouveau groupe. Nous formerons également un seul groupe des $m.\nu'$ permutations qui constituent les seconds sous-groupes de ces mêmes m classes; et ainsi de suite pour les troisièmes, les quatrièmes,..., sous-groupes de ces m classes. Les μ permutations des m classes seront partagées de cette manière en un nombre s de groupes déterminé par la formule

$$(5)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu}.\theta,$$

composés chacun de $m.\nu'$ permutations.

Il est clair que cette classification ne peut, comme chacune des quatre premières, donner lieu qu'à un seul et même partage relatif à un même nombre p_i, de quelque manière qu'on s'y prenne pour l'effectuer.

Remarque I. — Si on prend $p_i = 1$, on a $\nu' = 1$, $\theta = \nu$; et, par suite, la formule (5) produit cette autre formule qui nous sera utile plus tard

$$(6)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m}.$$

Remarque II. — Si m a des racines primitives et si p_i est l'une d'elles, $\nu' = \nu$, $\theta = 1$, et par conséquent cette même formule (5) reproduit la formule (3).

Sixième classification. — Il est encore possible de partager les μ permutations de m lettres en *deux* groupes jouissant de la propriété suivante : toutes les permutations d'un même groupe se déduisent les unes des autres par un nombre *pair* de substitutions successives de deux lettres quelconques, tandis que les permutations d'un des groupes se déduisent de celles de l'autre par un nombre *impair* de substitutions successives de deux lettres quelconques.

Admettons en effet que cette classification soit faite pour les permutations d'une même classe de m lettres, je dis que nous pourrons

partager toutes les permutations de ces m lettres en deux groupes jouissant de la propriété énoncée. Car pour passer des permutations d'une classe quelconque à celles d'une autre, il suffit d'effectuer sur les premières des permutations circulaires à m lettres. Mais toute permutation circulaire à m lettres, déduite d'une permutation donnée, peut être obtenue en effectuant sur cette dernière $m - 1$ substitutions successives de deux lettres ayant une lettre commune [*].

De là il suit que si m est impair, $m - 1$ sera pair; et dans ce cas, il faudra joindre à chacun des deux groupes, connus par hypothèse et relatifs à une même classe, toutes les permutations qu'on en déduit respectivement, par le procédé circulaire; et continuer cette même opération jusqu'à ce qu'on ait épuisé les m lettres données. Par ce moyen, *toutes* les permutations des m lettres seront évidemment partagées en deux groupes ayant exactement les mêmes propriétés que les deux groupes relatifs à une même classe.

De là il suit encore que si au contraire m est pair, $m - 1$ sera impair; et dans ce cas on déduira, comme précédemment, de chacun des groupes connus et relatifs à une même classe, les permutations circulaires commençant par les secondes lettres de ces permutations; mais on devra joindre *alternativement* celles déduites du premier groupe à celles du second, et *vice versâ*. Et puisque la somme de deux nombres impairs est un nombre pair, on devra joindre, au contraire, *respectivement* aux permutations du premier et du second des deux nouveaux groupes celles que l'on déduit du premier et du second des deux groupes primitifs par le procédé circulaire en commençant aux troisièmes lettres. On joindra encore *alternativement* aux permutations du premier et du deuxième des deux derniers groupes obtenus les permutations circulaires que l'on déduit du premier et du second des deux groupes primitifs en commençant par les quatrièmes lettres de ces permutations, puisque la somme de trois nombres impairs est un nombre impair. On continuera ainsi cette même série d'opérations jusqu'à ce qu'on ait épuisé les m lettres données; et, par ce moyen, il

[*] Ainsi, de *abcde* par exemple, on déduit la permutation circulaire *bcdea* qui peut être encore obtenue en effectuant sur *abcde* les quatre substitutions successives de deux lettres, *ab*, *ac*, *ad*, *ae* ayant une lettre commune *a*.

est clair que toutes les permutations de ces m lettres seront partagées en deux groupes jouissant de la propriété énoncée.

Pour effectuer cette sixième classification, il faut donc connaître les deux groupes primitifs d'une même classe; mais toutes ces permutations commencent par une même lettre, il suffit donc de savoir partager en deux groupes jouissant de la même propriété les permutations de $m - 1$ lettres. Or, cette dernière classification peut être faite, d'après ce qui vient d'être dit, si on sait effectuer cette même classification pour les permutations de $m - 2$ lettres; et ainsi de suite. En sorte qu'il suffit de classer les permutations de trois lettres a, b, c en deux groupes jouissant de la même propriété. Ce qui est aisé, car la remarque I de la cinquième classification appliquée à trois lettres donne les deux groupes

$$abc,\ bca,\ cab,$$
$$acb,\ cba,\ bac,$$

tels que les permutations d'un même groupe se déduisent les unes des autres par un nombre pair de substitutions successives de deux lettres, tandis que celles d'un groupe se déduisent de celles de l'autre par un nombre impair de substitutions successives de deux lettres.

Remarque. — Nous avons dit que deux substitutions successives de deux lettres, ayant une lettre commune, équivalent à une permutation circulaire de trois lettres : ainsi les deux substitutions *ab*, *ac* faites successivement sur *abc* produisent la permutation circulaire *bca*. Donc les permutations de chacun des deux groupes de cette sixième classification se déduisent les unes des autres par des permutations circulaires de trois lettres quelconques [*].

Classification composée. — Dans les six classifications qui précèdent nous avons eu égard aux m lettres données; mais on peut décomposer préalablement les m lettres d'une permutation quelconque en α suites,

---

[*] La loi de formation de cette sixième classification fournit un moyen très-simple pour obtenir le *déterminant* de m^2 quantités et pour démontrer les propriétés remarquables de cette fonction.

et soumettre les lettres de chacune d'elles à l'une des six premières classifications.

Soient m_1 le nombre de lettres de la première suite qui seront par exemple les m_1 premières de cette permutation, m_2 le nombre de lettres de la deuxième suite qui seront les m_2 lettres qui suivent, etc.; et enfin m_α le nombre de lettres de la dernière suite qui seront les m_α dernières; on aura

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\alpha :$$

et soumettons les m_1 premières lettres, les m_2 qui suivent, etc., et les m_α dernières de cette permutation à des classifications déterminées, mais quelconques et prises parmi les six premières. Soient $M_1, M_2,\ldots, M_\alpha$ les nombres de permutations que l'on obtient en opérant successivement et isolément sur les m_1 premières lettres, sur les m_2 qui suivent, etc., et sur les m_α dernières; en sorte que chacun d'eux soit égal à l'un des dénominateurs des formules (1), (2), (3), (4), (5), (6) ou au nombre 2, et relatif soit à m_1, soit à m_2, etc., soit à m_α. Le nombre de permutations que l'on déduira de la permutation donnée à m lettres sera évidemment égal au produit $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$: de toutes ces permutations nous formerons le premier groupe.

Supprimons ces permutations de toutes celles qu'offrent les m lettres, et parmi celles qui restent prenons une permutation quelconque sur laquelle nous ferons exactement ce que nous avons fait sur la première : nous obtiendrons $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ *nouvelles* permutations de m lettres dont nous formerons le second groupe. Je dis nouvelles; car si on considère une quelconque des permutations du premier groupe, et si on fait sur elle les mêmes opérations qu'on a effectuées sur la première, on reproduira ce même premier groupe; puisque la loi de formation de chaque groupe d'une quelconque des six classifications qui précèdent reproduit les permutations de ce groupe quelle que soit celle de ses permutations que l'on soumette à cette loi. Il en est évidemment de même du second groupe; donc si une des permutations de ce groupe coïncidait avec l'une de celles du premier, comme on déduit toujours par la même loi, toutes les permutations du second groupe coïncideraient avec celles du premier : ce qui est impossible,

puisque pour le former on est parti d'une permutation différente de celles de ce premier groupe.

Otons des μ permutations des m lettres ces nouvelles permutations de toutes celles que nous avions après la première suppression; et considérons, parmi celles qui restent, une permutation quelconque avec laquelle nous produirons, de la même manière, $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ permutations dont nous formerons le troisième groupe, et qu'on démontrerait, par le même raisonnement, être différentes de celles des deux premiers. Et continuons ainsi cette même opération jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les permutations des m lettres; ce qui arrivera inévitablement, puisque toute permutation différente de celles qui se trouvent dans les groupes déjà formés produit $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ permutations nouvelles. Nous aurons partagé ainsi les μ permutations de m lettres en un nombre de groupes déterminé par la formule

$$(7) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{M_1 M_2 \ldots M_\alpha},$$

composés chacun de $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ permutations, et assujettis à une même loi de formation; loi variable dans les applications.

Mais quelle que soit celle que l'on adopte, l'une quelconque des permutations d'un de ces groupes reproduisant toutes celles de ce groupe par cette loi, la classification qu'elle produit est unique de son espèce, comme les six premières; c'est-à-dire qu'elle ne donne lieu qu'à un seul et même tableau, de quelque manière qu'on la forme.

Application. — Comme exemple des six premières classifications, nous prendrons $m = 5$; auquel cas $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 4$, $\nu = 4$, et la formule (1) donne $s = 30$.

Le premier tableau sera donc :

Classes.	Groupes.	Permutations.
1	1	*abcde*, *acebd*, *adbec*, *aedcb*,
	2	*abced*, *acdbe*, *aebdc*, *adecb*,
	3	*abecd*, *aedbc*, *acbde*, *adceb*,
	4	*aebcd*, *abdec*, *acedb*, *adcbe*,
	5	*abdce*, *adebc*, *acbed*, *aecdb*,
	6	*adbce*, *abedc*, *acdeb*, *aecbd*;

Classes.	Groupes.	Permutations.
	7	*bcdea*, *bdace*, *becad*, *baedc*,
2	8	*bceda*, *beacd*, *bdcae*, *badec*,
		. . . .
3	13	*cdeab*, *cebda*, *cadbe*, *cbaed*,
		. . . . ;
4	19	*deabc*, *daceb*, *dbeca*, *dcbae*,
		. . . . ;
5	25	*eabcd*, *ebdac*, *ecadb*, *edcba*,
		. . . .

Le tableau relatif à la deuxième classification sera, d'après la notation adoptée et en observant que la formule (2) donne $s = 5$:

Groupes.	Permutations.
1	1, 2, 3, 4, 5, 6,
2	7, 8, 9, 10, 11, 12,
3	13, 14, 15, 16, 17, 18,
4	19, 20, 21, 22, 23, 24,
5	25, 26, 27, 28, 29, 30.

La troisième classification produira le tableau suivant, s étant égal à 6 :

Groupes.	Permutations.
1	1, 7, 13, 19, 25,
2	2, 8, 14, 20, 26,
3	3, 9, 15, 21, 27,
4	4, 10, 16, 22, 28,
5	5, 11, 17, 23, 29,
6	6, 12, 18, 24, 30.

La quatrième classification donnera le tableau suivant en prenant $p_i = 4$, auquel cas $\theta = 2$ et la valeur s donnée par la formule (4) est

égale à 60 :

Classes.	Groupes.	Permutations.
1	1	*abcde*, *aedcb*,
	2	*acebd*, *adbec*,
	3	*abecd*, *adceb*,
	. . . . ;	
2	13	*bcdea*, *baedc*,
	14	*bdace*, *becad*,
	. . . . ;	
. . . . ;		
5	49	*eabcd*, *edcba*,
	. . . .	

Le tableau de la cinquième classification sera, la formule (5) donnant $s = 12$ et en adoptant la notation du tableau précédent :

Groupes.	Permutations.
1	1, 13, 25, 37, 49,
2	2, 14, 26, 38, 50,
. . .	. . . . ,
12	12, 24, 36, 48, 60.

La sixième classification donnera enfin les deux groupes suivants :

1er groupe.

abcde, *acdbe*, *adbce*, *adceb*, *abdec*, *acbed*,
adebc, *abecd*, *acedb*, *aedbc*, *acebd*, *aedcb*,

plus les permutations circulaires de ces 12 écrites, et prises successivement par rapport aux lettres de rang 2, 3, 4, 5.

2e groupe.

abdce, *adcbe*, *acbde*, *acdeb*, *adbec*, *abced*,
acebd, *adecb*, *abedc*, *aebcd*, *aecdb*, *aedbc*,

plus les permutations circulaires de ces 12 écrites, et prises successivement par rapport aux lettres de rang 2, 3, 4, 5.

II.

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES GROUPES DES CLASSIFICATIONS PRÉCÉDENTES.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème I. — *Les ν permutations d'un quelconque des groupes de la première classification forment un seul et même ordre.*

En effet, plaçons sur une circonférence de cercle de rayon arbitraire et à égales distances les unes des autres les m lettres données, dans l'ordre qui produit la première des permutations du groupe que l'on considère, et formons les ν polygones relatifs aux ν permutations de ce groupe.

Le premier polygone s'obtient en joignant un à un les m points désignés par ces lettres, ce qui exige qu'on parcoure une seule fois la circonférence. Généralement le polygone relatif au nombre p_i, inférieur et premier à m, s'obtient en joignant les mêmes points de p_i en p_i, à partir du point considéré comme origine; ce qui exige qu'on parcoure p_i fois cette même circonférence. Mais, *la théorie de l'ordre étant indépendante de la notion de grandeur, et n'étant relative qu'à celle de la disposition des choses,* ce dernier polygone peut être obtenu, comme le premier, en parcourant une *seule* fois une circonférence d'un rayon p_i fois plus grand, et en prenant sur elle m points à égales distances les uns des autres. Et comme ce résultat est vrai pour toutes les valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ de p_i, il s'ensuit que les ν polygones relatifs aux ν permutations du groupe que l'on considère coexistent tous dans un seul quelconque d'entre eux, comme les racines d'une même équation, sans qu'on puisse les distinguer ou les isoler par aucune analyse. Donc ces ν polygones ne sont autre chose qu'*un seul et même polygone.*

Nous dirons dorénavant que les ν permutations qui correspondent à ces mêmes ν polygones ne forment qu'*un seul et même ordre;* et comme ce résultat est vrai pour les permutations de chacun des autres groupes, il s'ensuit que le théorème est démontré.

Corollaire I. — Il résulte de là : 1° que si on cherche le côté x

d'un polygone régulier de m côtés inscrit dans un cercle de rayon donné r, ce côté doit dépendre d'une équation de degré ν dont les racines sont les côtés des ν polygones étoilés de Poinsot; et la remarque du théorème I du Mémoire déjà cité prouve que cette équation ne doit contenir que les puissances paires de x, et que son degré se réduit par conséquent à $\frac{\nu}{2}$;

2° Que si on cherche dans quel cercle de rayon x on peut inscrire un polygone régulier de m côtés avec un côté donné c, ce rayon doit dépendre d'une équation de degré $\frac{\nu}{2}$.

Corollaire II. — Il résulte aussi de ce théorème et de ce qui a été démontré dans la quatrième classification que les ν' permutations de chacun de ses groupes forment un seul et même *sous-ordre*.

Théorème II. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la première classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Toutes les permutations d'un quelconque des groupes de cette classification ne sont en effet, théorème I, qu'un seul et même polygone, qu'un seul et même ordre. Donc, si, par un échange quelconque de lettres, une des permutations de l'un de ses groupes se change en une autre du même groupe, cet échange de lettres, effectué sur toute autre permutation de ce groupe, transformera nécessairement cette permutation en une autre du même groupe. Donc ce même échange de lettres, opéré successivement sur les ν permutations de ce groupe, transformera les unes dans les autres, ne fera que les déplacer.

Si, au contraire, un échange de lettres transformait une des permutations de l'un des groupes du premier tableau en une autre d'un groupe différent, cet échange de lettres transformerait, théorème I, toute autre permutation du premier groupe en une autre du second. Donc cet échange de lettres, opéré successivement sur les ν permutations du premier groupe considéré, changerait ces ν permutations en celles du second; et le premier groupe se substituerait tout entier au second.

Ainsi, le théorème est démontré.

Théorème III. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la deuxième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Il résulte en effet de cette classification que chaque groupe se compose d'une *même* lettre suivie des $m - 1$ autres, permutées de toutes les manières possibles. Donc si un échange quelconque de lettres transforme une permutation d'un des groupes de cette classification en une autre de ce groupe, il est clair que cet échange de lettres ne changeant pas la lettre immobile de ce groupe transformera toute autre permutation de ce groupe en une autre du même groupe.

Si, au contraire, un échange de lettres transformait une des permutations d'un des groupes de cette classification en une permutation quelconque d'un autre groupe, la première lettre immobile et relative au premier groupe que l'on considère serait donc changée en la première qui est immobile et relative à cet autre; et dès lors cet échange de lettres, effectué sur toute autre permutation de ce premier groupe, changerait cette permutation en une autre du second.

Ces deux résultats démontrent le théorème énoncé.

Remarque. — La loi de formation de cette classification et le théorème I prouvent que toutes les permutations d'un quelconque de ses groupes sont relatives à *tous* les polygones d'un *même* sommet, c'est-à-dire à *tous les ordres vus d'un même point;* du point a pour le premier groupe, du point b pour le second, etc., et du point l pour le dernier.

Théorème IV. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la troisième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Car les permutations d'un quelconque des groupes de la première classification forment, théorème I, un seul et même polygone, un seul et même ordre, et les permutations d'un quelconque des groupes de la troisième se déduisent des premières en les lisant circulairement à partir de la lettre a, puis de la lettre b, et ainsi de suite jusqu'à la dernière l. Donc les permutations d'un des groupes de cette troisième classification constituent un seul et même polygone, un seul et même ordre vu successivement de chacun des m points $a, b, \ldots, l$.

De là il suit que si un échange de lettres transforme une permutation d'un des groupes de cette troisième classification en une autre du même groupe, cet échange ne fera pas sortir du point de vue de cet ordre, et que par conséquent il transformera toute autre permutation de ce groupe en une autre du même groupe. De là il suit encore que si, au contraire, un échange de lettres transforme une permutation d'un des groupes de la même classification en une quelconque d'un autre groupe, cet échange de lettres fera passer du point de vue relatif au premier groupe que l'on considère à celui du second, et que par conséquent cet échange de lettres transformera toute autre permutation de ce premier groupe en toute autre du second.

C. Q. F. D.

Théorème V. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la quatrième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

En effet, les permutations d'un quelconque de ses groupes se déduisent de l'une d'elles, d'ailleurs arbitraire, en sautant dans le polygone qui lui correspond d'un même intervalle constant, en sautant du *même* intervalle dans le polygone obtenu, et ainsi de suite, cette opération étant répétée un nombre de fois déterminé. Donc, si, par suite d'un échange de lettres, une permutation d'un groupe quelconque se transforme en une autre de ce groupe, cet échange de lettres équivaut à l'opération précédente répétée un nombre de fois déterminé : mais cette permutation obtenue ou le polygone qui lui correspond n'est autre, corollaire II du théorème I, que le polygone qui correspond à la première où l'on a changé la notation ; donc ce même échange de lettres effectué sur cette autre permutation obtenue produira nécessairement une permutation du même groupe. Donc cet échange de lettres transformera les permutations de ce groupe les unes dans les autres, ne fera que les déplacer.

De plus, les permutations d'un quelconque des groupes de cette classification ne formant qu'un seul et même sous-ordre, il en résulte que si un échange de lettres transforme, au contraire, une permutation d'un de ses groupes en une autre d'un groupe différent, cet échange de lettres effectué sur toute autre permutation du premier groupe que

l'on considère transformera toute autre permutation de ce premier groupe en une autre du second.

Ainsi le théorème est démontré.

Théorème VI. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la cinquième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Car la loi de formation de cette classification et le corollaire II du théorème I prouvent que les permutations d'un quelconque de ses groupes constituent un seul et même sous-ordre vu successivement de chacun des m points $a, b, \ldots, l$. On peut donc appliquer aux groupes de cette classification le même raisonnement que celui qui a été appliqué aux groupes de la troisième : ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème VII. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la sixième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

En effet, une quelconque des permutations à m lettres étant donnée, l'un de ses deux groupes se compose de toutes les permutations qui s'en déduisent par un nombre *pair* de substitutions successives de deux lettres quelconques; et l'autre groupe se compose de toutes celles qui s'en déduisent par un nombre *impair* de substitutions successives de deux lettres quelconques, les permutations de ce dernier se déduisant par conséquent les unes des autres, comme le premier, par un nombre pair de substitutions successives de deux lettres arbitraires.

Donc, si un échange de lettres transforme une permutation quelconque d'un des deux groupes en une permutation de ce même groupe, cet échange de lettres équivaudra à un nombre pair de substitutions successives de deux lettres; dès lors ce même échange transformera toutes les permutations de ce groupe les unes dans les autres.

Si, au contraire, un échange de lettres transforme une permutation quelconque de l'un des deux groupes en une permutation de l'autre, cet échange de lettres équivaudra à un nombre impair de substitutions successives de deux lettres quelconques. Donc ce même échange trans-

formera toutes les permutations de l'un d'eux en toutes celles de l'autre.

Théorème VIII. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la classification composée sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Car les divers procédés qui déduisent d'une quelconque des permutations d'un des groupes de cette classification toutes les permutations de ce groupe déduisent également toutes les permutations d'un autre groupe d'une quelconque de ses permutations. On peut donc appliquer à ces groupes un raisonnement analogue au précédent : ce qui démontre le théorème.

Théorème IX. — *Les nombres* 1, 2, μ *et les valeurs* s *déterminées par les formules*

$$(1)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu},$$

$$(2)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

$$(3)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu},$$

$$(4)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu}.\theta,$$

$$(5)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu}.\theta,$$

$$(6)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m},$$

$$(7)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{M_1 M_2\ldots M_\alpha},$$

sont des nombres qui expriment combien de valeurs distinctes prennent les fonctions intransitives de m *lettres par les permutations de ces lettres.*

En effet, si on réunit en un seul groupe tous les groupes ou *ordres* des m classes de la première classification, et si on prend une fonction symétrique des valeurs d'une fonction arbitraire de m lettres qui soient

relatives à toutes les permutations de ce groupe unique, on obtiendra évidemment une fonction de m lettres qui n'aura qu'une seule valeur, et qui sera, par suite, symétrique par rapport à ces m lettres.

La fonction linéaire des m lettres $a, b, \ldots, l$

$$Aa + Bb + \ldots + Ll,$$

dont les coefficients A, B,..., L sont indépendants, prend évidemment un nombre de valeurs marqué par le nombre total des permutations qu'offrent ces m lettres.

Et il résulte du théorème IV de notre dernier travail [*] que, puisque toutes les permutations de m lettres peuvent être partagées, d'après ce qui précède, en s groupes de permutations *inséparables*, s étant égal à 2 ou déterminé par une quelconque des sept formules précédentes, il existe des fonctions de m lettres dont les nombres de leurs valeurs distinctes sont 2 ou s : et ces fonctions sont généralement *intransitives* d'après les définitions adoptées, puisque dans les classifications dont il est ici question aucune des m lettres ne demeure immobile.

Remarque. — La formule (7) produit un grand nombre de théorèmes parmi lesquels nous devons remarquer le suivant, à cause de son utilité dans les applications.

Théorème X. — *Si on décompose le nombre de lettres m en deux parties m_1, m_2 et si M_1, M_2 désignent respectivement les nombres de permutations qu'on obtient en soumettant les m_1 premières lettres et les m_2 secondes à l'une quelconque des six premières classifications, parmi les nombres propres à représenter combien de valeurs distinctes prennent les fonctions de m lettres, il y a ceux que l'on obtient en multipliant les nombres de valeurs distinctes que ces fonctions prendraient par les permutations de m_1 lettres par le facteur*

$$\frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m-1)m}{M_2}.$$

Car, parmi les nombres s de valeurs distinctes que prennent les

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, février 1865.

fonctions de m lettres, il y a les valeurs de s données par la formule générale (7). Or, cette formule, m étant égal à $m_1 + m_2$, peut se mettre sous la forme.

$$s = \frac{1.2.3\ldots m_1}{M_1} \cdot \frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m-1)m}{M_2}:$$

mais, d'après le signification de M_1 et d'après les six premières formules du théorème précédent, le facteur

$$\frac{1.2.3\ldots m_1}{M_1}$$

représente le nombre de valeurs distinctes que prend une fonction de m_1 lettres par les permutations de ces lettres; donc l'équation précédente démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — Si $m_1 = m - 1$, auquel cas $m_2 = 1$ et $M_2 = 1$, le second facteur du second membre de l'équation précédente est égal à m. Donc, parmi les nombres propres à représenter combien de valeurs distinctes prennent les fonctions de m lettres par les permutations de ces lettres, il y a les produits par le nombre m des nombres de valeurs distinctes que prennent ces fonctions par les permutations de $m - 1$ lettres.

NOTE.

Théorème. — *Les ν permutations d'un quelconque des groupes de la première classification sont telles, que, l'une d'elles étant donnée, on en déduit, par le procédé de l'intervalle constant, les mêmes ν permutations.*

Considérons en effet l'une d'elles, celle qui est produite par exemple par le nombre p_i inférieur et premier à m, et marchons dans cette permutation de p_k en p_k, p_k étant un autre nombre inférieur et premier à m. Marcher dans la permutation que l'on considère d'abord de p_i en p_i et ensuite de p_k en p_k dans la permutation produite, cela revient évidemment à marcher dans la première de $p_i p_k$ en $p_i p_k$. Or, chacun

des nombres p_i et p_h étant premier à m, leur produit sera aussi premier à m; et je dis que le résidu à m de $p_i p_h$ sera encore premier à m. Car, en désignant par r ce résidu et par M un nombre entier, on aura

$$p_i p_h = \mathrm{M}.m + r;$$

et, si m et r avaient un facteur premier commun α, le second membre de cette égalité, et par suite le premier, serait divisible par α; et par conséquent $p_i p_h$ ne serait pas premier à m. Donc ce résidu est l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ inférieurs et premiers à m, et par conséquent la permutation obtenue coïncidera avec l'une de celles qui forment le groupe que l'on considère.

Je dis de plus que si on remplace successivement p_h par $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ les ν permutations qu'on déduira de celle que nous avons d'abord considérée et qui est relative à p_i sont toutes différentes les unes des autres. Il suffira de prouver pour cela que les résidus à m des ν produits $p_1 p_i$, $p_2 p_i, \ldots, p_\nu p_i$ sont tous différents. Car si deux d'entre eux, ceux de $p_k p_i$, $p_{k'} p_i$ par exemple, étaient égaux, la différence de ces produits $(p_k - p_{k'}) p_i$ serait un multiple de m; ce qui ne peut être, puisque p_i est premier à m et que $p_k - p_{k'}$ est inférieur à m.

Donc enfin les ν permutations d'un quelconque des groupes de la première classification sont telles, que, l'une d'elles étant donnée, on en déduit ces mêmes ν permutations par le procédé de l'intervalle constant.

SUR LA FORME

$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme à six variables

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$$

ne peut évidemment représenter ni les entiers impairement pairs, ni les entiers $\equiv 3 \pmod{4}$; mais pour tout autre entier donné, qu'il soit pairement pair, ou bien impair et $\equiv 1 \pmod{4}$, elle fournit au contraire des représentations dont on doit désirer de connaître le nombre. Je me propose de communiquer ici des formules commodes pour cet objet.

Et d'abord j'observe que le cas d'un entier pairement pair ne peut offrir aucune difficulté à ceux qui connaissent ce que nous avons donné (dans le cahier de mai) au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2.$$

Soit en effet

$$2^{\alpha+2}m$$

un tel entier, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. L'équation

$$2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2$$

ne pouvant avoir lieu qu'avec une valeur paire de x, posons

$$x = 2x_1;$$

en divisant par 4, il s'ensuivra

$$2^{\alpha}m = x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2,$$

équation parfaitement équivalente à celle que nous avions d'abord. La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2\right)$$

ne diffère donc pas de celle de

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2\right)$$

qui est maintenant bien connue et sur laquelle je n'ai pas à revenir.

2. Le cas d'un entier impair $m \equiv 1 \pmod{4}$, c'est-à-dire d'un entier impair de la forme $4g + 1$, n'est pas si facile. Il se subdivise en deux autres suivant que g est pair ou impair, c'est-à-dire suivant que l'on a

$$m = 8l + 1,$$

ou bien

$$m = 8l + 5.$$

Mais toujours il faut introduire la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

ou

$$\rho_2(m),$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

Il faut aussi avoir égard, quand elle est possible, à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier impair i est supposé positif, tandis que s est indifféremment positif, nul ou négatif. On comptera le nombre $\rho(m)$ des solutions de cette équation et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

pour l'ensemble des solutions.

Cela posé, si m est de la forme

$$8l + 1,$$

la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

sera égale à

$$\frac{1}{2}\rho_2(m) + \frac{3}{2}\left[2\sum i^2 - m\rho(m)\right],$$

tandis que quand m est de la forme

$$8l + 5,$$

cette valeur s'exprime par

$$\frac{1}{2}\rho_2(m) - \frac{1}{2}\left[2\sum i^2 - m\rho(m)\right].$$

On pourrait désirer de n'avoir qu'une seule formule. Alors il faudra dire que pour tout entier m, de la forme $4g + 1$, la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

est

$$\frac{1}{2}\rho_2(m) + \frac{1}{2}[1 + 2(-1)^g]\left[2\sum i^2 - m\rho(m)\right].$$

J'ai cru qu'il valait mieux séparer nettement les entiers $8l + 1$ des entiers $8l + 5$.

3. On a vu, dans le cahier de mai, que la différence

$$2\sum i^2 - m\rho(m)$$

peut être remplacée par une somme unique. Faisons de toutes les manières possibles

$$2m = j^2 + j'^2,$$

j et j' étant des entiers impairs et positifs; la somme dont il s'agit

sera

$$\sum (-1)^{\frac{jj'-1}{2}} jj'.$$

En employant une notation connue de Legendre, que Jacobi a généralisée, cette somme peut encore s'écrire

$$\sum \left(\frac{-1}{jj'}\right) jj'.$$

On peut donc substituer aux formules du n° **2** les formules ci-après :

1° Pour $m = 8l + 1$,

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2) = \tfrac{1}{2}\rho_2(m) + \tfrac{3}{2}\sum \left(\frac{-1}{jj'}\right) jj';$$

2° Pour $m = 8l + 5$,

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2) = \tfrac{1}{2}\rho_2(m) - \tfrac{1}{2}\sum \left(\frac{-1}{jj'}\right) jj'.$$

Ces dernières formules sont très-élégantes; mais nos anciennes formules sont préférables quant à la facilité du calcul.

4. Appliquons les formules du n° **2** à quelques cas simples; et d'abord supposons que m soit un nombre premier de la forme $8l + 1$ On pourra alors écrire d'une seule manière

$$m = a^2 + 4b^2,$$

a et b étant supposés positifs, a impair, b pair; mais l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

aura deux systèmes de solutions, savoir :

$$i = a, \quad s = b$$

et

$$i = a, \quad s = -b.$$

Comme b n'est pas nul, ces deux systèmes sont distincts. On a

donc ici

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2a^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(m) = m^2 + 1.$$

La valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

s'exprimera donc par

$$\frac{1}{2}(m^2 + 1) + 6a^2 - 3m.$$

Pour un nombre premier m de la forme $8l + 5$, on pourra de même écrire une seule fois

$$m = a^2 + 4b^2,$$

a et b étant positifs, a et b impairs tous deux. On aura encore

$$\rho(m) = 2, \quad \sum i^2 = 2a^2, \quad \rho_2(m) = m^2 + 1.$$

Mais la formule à employer étant différente, on trouvera que la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

s'exprime ici par

$$\frac{1}{2}(m^2 + 1) - 2a^2 + m.$$

Nous aurons de nouveau à nous servir de la formule propre au cas des entiers $8l + 1$, si nous prenons

$$m = q^2,$$

q étant un nombre premier $\equiv 3 \pmod{4}$. L'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

ne pourra alors avoir lieu qu'en faisant

$$i = q, \quad s = 0.$$

De là

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = q^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(m) = \rho_2(q^2) = q^4 - q^2 + 1.$$

Il est aisé d'en conclure que la valeur de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2)$$

s'exprime cette fois par

$$\frac{1}{2}(m+1)^2,$$

résultat digne de remarque à cause de sa simplicité. On doit avoir, par exemple,

$$N(9 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 16v^2) = 50.$$

Or les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$

dont la seconde comporte des permutations, montrent que, pour l'entier 9, il y a en effet cinquante représentations sous la forme voulue.

SUR

LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS,

THÈSE DÉDIÉE A M. ÉDOUARD KUMMER;

PAR M. PAUL BACHMANN [*].

Disquisitiones ad determinandum valorum numerum spectantes, quos functio n elementis composita elementorum permutatione induere potest, a generali quæstionis solutione longe adhuc absunt. Facile enim nonnulla theoremata generalia demonstrata sunt, ut illud, esse valorum numerum producti $N = 1.2.3...n$ divisorem. Quum autem inventum esset, non omnes hos divisores ad exprimendum illum numerum aptos esse, eorum qui essent indagatio paucos adhuc amplexa est. Hujus rei causa quum in eo mihi videatur quærenda, ut methodi, quas adhibitas esse novi, a generalitate absint et omnia, quorum solutio attacta sit, problemata singularibus considerationibus solvi debuerint, quæsivi, num modo directo tractatum problema ad methodum quandam generaliorem perducere possit. Quamvis difficillimum hoc problema ut longe alia via ad solutionem sit provehendum fieri possit, eam tamen quam persecutus sim, hac dissertatione designare mihi liceat. Quam in tres partes dividamus :

Primam principia quædam continentem;

Secundam, quæ de functionum m valorem formis generalibus theoremata nonnulla admonet;

Tertiam de substitutionum proprietatibus agentem.

[*] DE SUBSTITUTIONUM THEORIA MEDITATIONES QUÆDAM. — Dissertatio inauguralis, quam consensu et auctoritate amplissimi philosophorum ordinis in alma litterarum Universitate Friderica Guilelma, ad summos in Philosophia honores rite capessendos, die XXIV. M. Martii A. MDCCCLXII. H. L. Q. S. publice defendet auctor *Paulus Bachmann*. — Berolini, typis Gustavi Schade.

I.

Art. 1. — Jam primum videamus, in quo problema generale consistat. Dato autem numero contento in serie 1, 2, 3,..., N, hæ quæstiones occurrunt :

Danturne functiones quarum numerus valorum æquet ipsum f? Quando vero exstant, quæ est forma earum generalis?

Quas igitur persequentes ad solas functiones algebraicas rationales integras respicimus, quippe quæ maximum in Algebra usum habeant atque emolumentum. Hæ omnes additione efficiuntur et multiplicatione; quibus operationibus evolutis, prodit aggregatum mononomiorum cum coefficientibus ab elementis non pendentibus; quare forma functionum generalis hæc erit $\Sigma c.M$.

Quodcunque autem mononomium formam induit

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

ubi exponentium nonnulli cifræ æquales esse possunt. Habeant ipsorum m_1 valorem eundem, alii m_2 alium,..., denique m_k reliqui alium valorem, ut sit

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$$

quæ, si ipsis k, m_1, m_2,..., m_k omnes qui locum habere possunt valores tribuis, generalissima suppositio est, valorum numerus æquabit

$$\frac{1.2.3\ldots n}{m_1!\, m_2!\ldots m_k!}$$

Qua in formula generalis pro hocce casu simplici problematis solutio continetur.

Art. 2. — n elementa a_1, a_2,..., a_n modis N diversis permutari sive in ordinem redigi possunt. Si in cujusvis permutationis locum aliam permutationem substituis, substitutionem efficis, quas generaliter per θ, η,..., designabimus. Constituentibus autem elementis functionem, substitutiones plane ab eis independentes erunt neque

determinatæ, nisi permutatio quædam cui applicandæ sint datur [*]. Quoties substitutiones θ, η,..., successive adhibentur, operationem inde ortam per productum $\theta.\eta$... repræsentabimus, in quo generaliter ordinem factorum immutare non licet. Quo statim quid sub potentia seu dignitate substitutionis sit intelligendum elucet. Designata deinde substitutione identica per unitatem, substitutio θ, quoniam pluries repetita certe identicam denique substitutionem generabit, ad exponentem quendam t pertinebit, sive erit t minimus exponens talis ut $\theta^t = 1$.

Art. 3. — Quærentem autem, quidnam methodi adhuc adhibitæ commune habeant, fugere non potest, earum quasi principium hoc esse : Datis substitutionibus θ_1, θ_2,..., et functione pro illis invariabili, inveniantur substitutiones et earum numerus, quæ functionis valorem non mutent.

Quæ nobis etiam quæstio fundamentalis erit. Quoniam vero, si substitutiones tales, quarum productum aliquod ex iisdem alicui æquale fiat, familiam (eine Gruppe) constituere dicimus, substitutiones quæsitæ aliæ non sunt nisi familia ex ipsis θ_1, θ_2,..., genita, quæstio illa in hanc recedit, ut datis quibusdam substitutionibus familia ex iis genita inveniatur.

Art. 4. — Valent autem de familiis nota hæc theoremata :

1° Quælibet familia substitutionem identicam et, si substitutionem θ, omnes etiam ejusdem potentias includit.

2° Data familia $\theta_1, \theta_2,..., \theta_m$, designante θ quamvis familiæ substitutionem, producta

$$\theta_1\theta,\ \theta_2\theta,...,\ \theta_m\theta,$$

sive etiam

$$\theta\theta_1,\ \theta\theta_2,...,\ \theta\theta_m$$

---

[*] Dato enim functionis valore quodam, designatis locis, quos elementa occupant, indicibus 1, 2, 3,..., n, hæc locorum determinatio eadem manet, quomodo elementa permutentur. Substitutionem θ autem, ex. gr. (1, 2, 3,..., n) id indicere volumus, ut elementis, quæ in quovis functionis valore commodum dato locos 1, 2,... n obtinent, ea quæ locis, 2, 3,..., 1 respondent, substituantur. Alia igitur substitutio post θ adhibenda iis denuo elementis adhibetur, quæ in valore jam obtento locos 1, 2, 3,..., n occupant.

totam familiam reproducunt. Sit vero η alia substitutio, producta

$$\eta\theta_1,\ \eta\theta_2,\ldots,\ \eta\theta_m$$

et inter se et a familia diversa erunt.

3° Habeat deinde familia F numerum g substitutionum et familia F′ in ea contenta g' substitutiones, erit g' ipsius g divisor.

4° Quare, quia substitutiones duabus familiis F, F′ e g, g' terminis constitutis communes ipsæ familiam constituunt, earum numerus ipsarum g, g' divisor erit.

II.

DE FUNCTIONUM FORMIS.

Art. 5. — Elementa $a_1, a_2,\ldots, a_n$, quibus functiones componuntur, semper radices æquationis

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

esse supponuntur, præterea plane arbitraria, indeterminata neque ullam inter se relationem habentia.

Tum sint functiones quælibet F, F′. Jam vero quia satis non est, ut has functiones eodem valorum numero gaudere scias, sed fieri potest, ut adhibita substitutione altera mutetur, altera valorem servet, eas functiones amplectentes, quæ æque se habeant et quas functiones congruas dicemus, totam functionum n elementis compositarum multitudinem in classes disjungimus tales, ut e singulis classibus una qualibet functione sumta, omnes qui locum habere possunt casus diversos obtineamus. Similium vero functionum nomen iis reservabimus, quarum altera pro omnibus quidem substitutionibus, quibus altera non mutetur, immutata maneat neque vero vice versa.

Art. 6. — Constituant substitutiones $\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_g$ familiam; data functione quadam sit f valorum numerus, quos per illas substitutiones induit, g_1 substitutionum, per quas immutata manet, numerus. Quæ quoniam familiam constituunt, g_1 ipsius g divisor esse debet, unde esse $f = \frac{g}{g_1}$ et valorum quos functio induere potest, numerum ipsius N divisorem facile intelligitur.

Hinc generalis functionum quæ per substitutionem θ non mutantur forma institui potest. Sit enim M (1) mononomium quodlibet functionis :

$$\Sigma c.\mathrm{M}(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$\theta^t = 1$; M (1) per substitutionem θ aut mutatur aut non mutatur, profecto autem substitutione t^{ies} repetita numerus τ valorum resultat, ubi τ ipsum t metitur. Quare designante

$$\text{cyc. } \mathrm{M}(\theta^r) = \mathrm{M}(1) + \mathrm{M}(\theta) + \mathrm{M}(\theta^2) + \ldots + \mathrm{M}(\theta^{\tau-1})$$

$\mathrm{M}(\theta^i)$ valorem mononomii M (1) facta substitutione θ^i, facile intelligitur adæquatam functioni immutatæ conditionem esse, ut formam $\Sigma c.$ cyc. $\mathrm{M}(\theta^r)$ induat, ubi c coefficientem numericum, aut, si non omnia elementa permutantur, eorum quæ non mutantur functionem designat. Quo statim fluit, omnem functionem symmetricam eadem forma gaudere, in qua vero singulus cyclus omnes mononomii valores continere debet. Functiones symmetricas per signum $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ designabimus. Quæ quum congruæ sint, primam classem constituunt aliasque omnes excludunt.

Art. 7. — Data functione F, f valoribus affecta, qui per $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_f$ repræsententur, functionem φ cogitemus hos valores quasi elementa continentem. Quorum elementorum permutationes quæ esse possunt $1.2.3\ldots f$ generaliter non omnes permutando ipsa a produci possunt. Quare, si functio φ ipsorum F respectu symmetrica est, erit etiam ipsorum a respectu, de asymmetria autem quantitatum F illam quantitatum a concludere non licet. Sint vero m elementorum a functiones $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_m$, habente æquatione m^{ti} gradus illas radices continente coefficientes symmetricos, valores diversi, quos veluti F_1 induere potest, inter illas functiones reperiuntur. Quas si pro diversis ipsius F_1 valoribus habemus, designante

$$\Pi(z - \mathrm{F}) = (z - \mathrm{F}_1)(z - \mathrm{F}_2)\ldots(z - \mathrm{F}_f),$$

æquationem illam hoc modo scribi posse

$$\Pi(z - \mathrm{F})^k = 0$$

statim sequitur; uti etiam, si $F_1, F_2, \ldots, F_f$ quidam functionis valores diversi et æquationis, cujus radices sint, coefficientes symmetrici, illos omnes functionis valores esse, concludendum erit.

Art. 8. — Omnium functionum f formis affectarum indicium eo inveniri potest, ut æquationi irreductibili f^{ti} gradus sufficiant, sive ad æquationem f^{ti} gradus cum coefficientibus ipsorum a respectu symmetricis pertineant. Primo enim æquatio in duos factores disjungi nequit, quorum coefficientes symmetrici sint, quia tum alter factor, cui radices $F_a, F_b, \ldots, F_c$ inessent, omnes valores contineret contra hyp. Secundo functio pluribus ipso f valoribus affecta tali æquationi sufficere omnino non potest. Postremo functionis, quæ pauciores valores habet, quando æquationi sufficit, omnes valores totidem repetiti inveniri debent, quare læva pars expressionis coefficientibus symmetricis affectæ potentia erit neque irreductibilis.

Art. 9. — Sit F_1 functio f valoribus affecta, G_1 alia functio per nullam substitutionem ipsam F_1 non mutantem valorem mutans, familiam substitutionum ad functionem G_1 pertinentem multiplum familiæ ad ipsam F_1 pertinentis ideoque numerum valorum functionis G_1 divisorem ipsius f esse, facile perspicitur. Constat functiones G_1 per functionem F_1 rationaliter exprimi posse. Sit enim

$$\psi(F) = 0$$

æquatio f ipsius F_1 valores quasi radices continens, quæ dum elementa a plane sunt indeterminata radices æquales habere non potest, erit

$$G_1 = \frac{\varphi(F_1)}{\psi'(F_1)} = \frac{\varphi(F_1)\psi'(F_2)\ldots\psi'(F_f)}{N[\psi'(F_1)]}.$$

Quoniam autem hujus fractionis denominator symmetrica elementorum functio, numerator integra ipsius F_1 et quantitatum $p_1, p_2, \ldots, p_n$ functio est, illam expressionem in hanc redigere licet formam

$$G_1 = \sigma + \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_1^2 + \ldots + \sigma_{f-1}.F_1^{f-1} \qquad (g)$$

quod uno tantum modo perfici posse patet. Quia vice versa quævis

functio G_1, quam in formam illam redigere licet, per nullam substitutionem ipsam F_1 non mutantem valorem mutat, has tantum, quas ipsi F_1 similes vocavimus, ea proprietate affectas esse sequitur. Quarum functiones congruæ speciem singularem constituunt.

Jam sit φ functio N valoribus affecta, quum quævis functio pauciorum valorum ipsi φ similis, functiones N valoribus affectæ ipsi φ congruæ sint, omnes functiones per unam illam exprimere et in formam

$$F_1 = \sigma + \sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_1^2 + \ldots + \sigma_{N-1} \varphi_1^{N-1} \qquad (f)$$

eruere possumus. Qua in forma quantitatibus σ rite et modo quam generalissimo determinatis, prodeunt formæ generales pro diversis functionum classibus incongruis.

Posito $G_1 = g(F_1)$, determinatis coefficientibus modo quam generalissimo, ut forma illa alias functiones non implicet nisi f valoribus affectas, si ipsius F valorem $f(\varphi)$ substituis, $G = gf(\varphi)$ functionum ipsi F congruarum ope functionis φ expressionem generalissimam esse obtinebis. Æquatio autem functionis G, quoniam, si G re vera f valores induit, irreductibilis, aliter expressionis irreductibilis potentia esse debet, coefficientes in $g(F)$ ita determinandi sunt, ut hoc evenire non possit.

Data igitur functione F, cui alius valor non exstat nisi $-$ F, dato ex. gr. elementorum differentiarum producto, quævis duobus valoribus affecta functio formam $G = \sigma + \sigma_1 F$ induet, supposito σ_1 a cifra diverso. Quod etiam hinc concludendum, quod æquatio

$$y^2 - 2\sigma y + (\sigma^2 - \sigma_1^2 F^2) = 0$$

cui G sufficit, quadratum esse non potest. Jam idem sequitur, designante F quamvis duobus valoribus affectam functionem.

Art. 10. — Ad datam substitutionum familiam $1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{g-1}$ functionem pertinere dicemus invariabilem pro omnibus in illa contentis substitutionibus, variabilem pro quavis alia; sin ultima conditio locum non habet, familiæ eam sufficere dicemus. Ad quamvis functionem substitutionum familia inveniri potest, ea scilicet ad quam functio pertinet; vice versa autem semper invenire licet functionem

ad datam substitutionum familiam pertinentem. Sint enim $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$ functionis N valoribus affectæ, qui substitutionibus respondent, valores, horum quævis functio symmetrica familiæ sufficiet. Designante autem φ_1 mononomium $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, in quo omnes exponentes inter se diversi sunt, data functione

$$F(1) = \varphi(1) + \varphi(\theta_1) + \ldots + \varphi(\theta_{g-1})$$

erit

$$F(\eta) = \varphi(\eta) + \varphi(\eta\theta_1) + \ldots + \varphi(\eta\theta_{g-1})$$

valor ipsi $F(1)$ æqualis aut ab eo diversus, prout singula mononomia inter se consentiunt necne, sive, quod idem est, substitutiones. Quoties igitur substitutiones $1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{g-1}$ familiam constituunt, functio $F(1)$ inveniri potest ad eam pertinens; quare idem evadit numerus pro functionum incongruarum classibus, qui pro substitutionum familiis, illarumque investigatio in harum recedit.

III.

DE SUBSTITUTIONUM FAMILIIS.

Art. **11**. — Secundum quod art. **5**, **10** diximus, problema huic dissertationi propositum eo reducitur, ut omnis substitutionum familia et quot contineat substitutiones inveniatur, sive ut, datis substitutionibus $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$, earum familia determinetur. Quod idem problema est atque hoc : data substitutionum familia $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_g$, inveniatur, quomodo numerus terminorum augeatur, assumta nova substitutione θ. Cujus problematis generalis casus qui videntur simplicissimi hic proferentes, ab iis substitutionum familiis quæ ex una tantum generantur, quas primi ordinis appellabimus, initium faciamus.

Art. **12**. — Si vero in substitutionum naturam inquiris, quomodo alia ab alia pendeat, hanc primam invenies methodum. Quamvis enim substitutionem θ in alius potentiæ speciem exprimere licet. Namque sit ϑ quælibet ex omnium systemate, ejus potentiæ t substitutiones procreabunt, quando primum $\vartheta^t = 1$. Quod, si pro omnibus reliquis substitutionibus repetis, quævis substitutio θ aut ex ipsarum ϑ aut ex earum dignitatum erit serie. Substitutiones autem $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_\nu$ ita

determinari possunt, ut binarum series non omnes habeant communes terminos, et pro quavis ϑ talem etiam potentiam ponere licet, cujus dignitates totam ipsius ϑ seriem reproducant. His propositis, illam substitutionum classificationem uno tantum modo perfici posse, facile demonstratur. Si duarum ϑ_1, ϑ_2 series terminos communes implicant, horum numerus communis exponentium, ad quos illæ pertinent, divisor esse debet. Substitutiones autem ϑ primitivas appellabimus.

Art. **15**. — Jam vero ill. Cauchy omnem substitutionem in plures cyclicas, quarum diversa quæque elementa permutat, dissolvi posse docuit. Quam paullo persequamur dissolutionem. Sit primum

$$\theta = (a_1\, a_2 \ldots a_p)(a_{p+1}\, a_{p+2} \ldots a_{p+q}) \qquad (p, q).$$

Qua in forma si omnes qui esse possunt, cyclos sumis, $p+q=n$ elementis omnimodis in p, q divisis,

$$\frac{1.2.3\ldots n}{p.q}$$

substitutiones continentur. Ipsis autem p, q modis $(n+1)$ valores tribuendo quorum summa $= n$, substitutiones contentæ in formis (p, q), (p', q') diversæ inter se erunt, nisi $p' = q$, $q' = p$. Eodem modo, n elementa in tres classes dividendo prodeunt

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$$

formæ (p, q, r) simul formas (p, q) omnes involventes; quarum eas tantum retinebimus, quæ substitutiones ad aliarum diversas comparant. Generaliter n elementa, quum modis

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

diversis in m classes dirimi possint, totidem formæ $(p, q, r, \ldots, s)$ resultant, et postquam abundantes sublatæ sunt, pro quavis restante numerus substitutionum, quas continet, formula

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q+r+\ldots+s)}{p.q.r\ldots s}$$

calculatur, quæ per 1, 2, 3,..., μ etiam dividenda est, quoties μ quantitatum p, q, r,..., s æquales evadunt. Summa denique omnium pro $m = n$ hoc modo inventorum numerorum ipsum N æquare debet, ex. gr. pro $n = 4$

$$1.2.3.4 = 1.2.3.4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.1.2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{1.1.1.1}\right).$$

Art. **14**. — Hæc ill. Cauchy methodus ad inveniendum substitutionum primitivarum systema adhiberi potest. Cujus rei theoria hæc est : Sit $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ cyclus ordinis p, repetita substitutione cyclica r^{ies}, novus cyclus secundum illam methodum instructus in plures cyclos distingui potest. Namque a_1 in a_{r+1}, a_{r+1} in a_{2r+1}, etc., abeunt. Itaque, si r ad ipsum p primus est, ad a_1 non prius revertimur, quam omnia elementa obviam venissent; sin habent maximum quendam divisorem s, quum minimum ipsis commune multiplum sit $\frac{p}{s}\cdot r$, unus ille cyclus in s minores $\frac{p}{s}$ elementis compositos disjungitur. Quare inter cycli ordinis p repetitiones sunt $\varphi(p)$ tantum ejusdem ordinis, ubi $\varphi(p)$ significatione in numerorum theoria usitata gaudet. Sumto aliorum qui ex iisdem elementis componi possunt cyclorum quodam, alii $\varphi(p)$ cycli ordinis p obtinentur a prioribus plane diversi.

Art. **15**. — Jam primum cyclum n elementorum consideremus. Secundum articulum præcedentem cyclorum series institui potest

$$c_1(n)\, c_2(n) \ldots c_\nu(n) \qquad (n)$$

ubi

$$\nu = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\varphi(n)},$$

quorum potentiæ omnes ordinis n cyclos continent. Quia neque binorum potentias inter se reducere licet, neque substitutionem concipere nisi ipsam n elementorum cyclum constituentem, cujus potentiæ cyclum ordinis n gignant, substitutiones (n) in primitivarum numero ducere possumus. Quarum potentiæ quum simul omnes substitutiones implicent, in quibus n elementorum cyclus in nonnullos totidem

elementis compositos disjungitur, (neque ullam aliam) ad illas in sequentibus respiciendum non erit. Dividamus igitur cyclum n elementorum in duos p, q elementa continentes; qua substitutione per $c(p)c(q)$ designata r^{ies} repetita, prodit $c(p)^r.c(q)^r$. Sit δ maximus ipsis p, q communis divisor, $p = p'\delta$, $q = q'\delta$, $\mu = p'q'\delta$, substitutio ad exponentem μ pertinebit. Sed, quia r^{ta} potentia tum solum ejusdem formæ substitutionem generabit, quum r et ad p et ad q primus, quod erit, quoties r ad ipsum μ primus et vice versa, inter μ dignitates $\varphi(\mu)$ tantum formam $c(p)c(q)$ retinebunt. Deinde $\frac{1.2.3\ldots n}{p!\,q!}$ series instituere licet, quarum $\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{\varphi(\mu)}$ quæque substitutiones includit. Hæ denuo, quarum potentiæ omnes, in quibus cyclus n elementorum in duos p, q elementorum disjungitur, substitutiones implicant, inter primitivas quas diximus habendæ sunt. Jam satis quomodo pergendum sit, intelligitur.

Art. **16**. — Quæritur autem, quonam criterio substitutio primitiva ab aliis dignosci possit. Primum vero datam substitutionem θ et k cyclis a elementorum compositam talis tantum substitutionis potentiam evadere posse, cujus cyclis singulis multiplum a elementorum insit, facile perspicitur. Posito igitur $k_1 + k_2 = k$, $\theta_1 = c(k_1 a)c(k_2 a)$, quoniam ipsius θ_1 potentia x^{ta} ipsi θ æqualis evadere debet, $c(k_1 a)^x$ in k_1 cyclos a elementis constantes dirimitur, eritque x ipsius k_1 multiplum, scilicet $i_1 k_1$, ubi i_1 ad a prima quantitas. Eodem modo $x = i_2 k_2$, i_2 ad a primus. Deinde substitutionem consideremus θ constantem ex k cyclis a elementorum, ex l cyclis b elementorum, ex m cyclis c elementorum, etc.; quam talis tantum substitutionis quasi potentiam haberi, cujus forma

$$c(k_1 a)\ldots c(k_\alpha a)\,c(l_1 b)\ldots c(l_\beta b)\,c(m_1 c)\ldots$$

sit, statim concluditur. Quæ forma ab ipsius θ forma primitiva differet, quando non omnes quantitates k_i, l_i,..., unitati æquales. Jam sit illa potentia x^{ta}, conditiones exstant hæ :

$$x = i_1 k_1 = i_2 k_2 = \ldots = h_1 l_1 = h_2 l_2 = \ldots \text{ etc.}$$

quantitates i ad ipsum a, quantitates h ad ipsum b, etc., primæ. Quibus conditionibus si sufficere potes, data substitutio in alius potentiæ speciem exprimitur, neque primitiva est. Hæ autem illarum æquationum resolutionem non admittunt.

Designante ϑ quamvis substitutionem primitivam, $F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a)$ autem substitutionum $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$ familiam, symbolum $F(\vartheta^k)$ omnis primi ordinis familiæ locum obtinet. Exponentis t autem, ad quem ϑ pertinet, omnes divisores ad exprimendum substitutionum in primi ordinis familia contentarum numerum idonei sunt.

Art. **17.** — Ubi autem omnes qui esse possunt numeros diversis primi ordinis substitutionum familiis respondentes invenisse satis est, ut primitivæ substitutiones notæ sint, non poscitur. Namque si substitutio θ art. præc. ad exponentem μ pertinet, erit μ minimum ipsis a, b, $c, \ldots$, commune multiplum, atque exponentis μ', cui $\theta' = c(ka)c(lb)\ldots$ pertinet, divisor. Sed in posteriore substitutione binos cyclos diversum elementorum numerum includere supponi potest. Tum, quoniam familia $F(\theta')$, quoties μ' divisorem quendam continet, familiam ei respondentem includet neque ullam aliam, ut omnes quæsiti numeri inveniantur, omnes quantitates μ, quæ ipsius n in summandos inæquales discerptionibus respondeant, inveniendas earumque divisores eruendos esse patet.

Art. **18.** — Transeuntes jam ad superiorum ordinum familias, notiones quasdam generales introducamus, quæ ad problematis reductionem servire possint. Substitutiones enim $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$ quarum familiam inquirimus, generatrices appellabimus. Quarum familia, quoniam generaliter ex aliis etiam substitutionibus in ea contentis generatricibus produci poterit, eas quæ simplicissimam videntur præbere speciem, inquirere convenit. Primum igitur substitutiones $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$ ita reducere licet, ut nulla tanquam ceterarum productum haberi possit. Deinde autem inter omnes familiam generandi modos eos eligamus, quorum numerus substitutionum generatricum quam minimus evadat, ita ut minor substitutionum numerus, in quarum producta substitutiones illæ generatrices exprimantur, in data familia inveniri non possit. Quæ in eam formam redacta $F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a)$ secundum substitu-

tionum generantium $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$ numerum familia a^{ti} ordinis irreductibilis appellabitur.

Art. 19. — Duo substitutionum complexus

$$\theta_1,\ \theta_2, \ldots,\ \theta_a, \quad \eta_1,\ \eta_2, \ldots,\ \eta_b$$

æquivalentes dicemus, quando eandem substitutionum familiam generant, sive, quoties illius complexus substitutiones in hujus familia sunt contentæ et vice versa. Jam, quando

$$F(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_a) = F(\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_a) \qquad (1)$$

semper etiam erit

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_a) = F(\theta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_a)$$

sed rem invertere generaliter non licebit. Videlicet, ut hæc æquatio locum habeat, supponere satis est, utramque familiam (1) eandem familiam et ejusdem familiæ substitutionum cum ipsa θ_1 combinationes quasdam, quæ pro utraque aliæ sint, continere. Generalius, quando familia F_1 ipsi F'_1, F_2 ipsi F'_2, etc., æquivalebit, æquivalebit etiam familia ex ipsarum $F_1, F_2, \ldots,$ substitutionibus generatricibus genita illi familiæ, quam substitutiones ipsarum $F'_1, F'_2, \ldots,$ generatrices producunt; quod convertere generaliter non licebit. Substitutioni autem θ ad exponentem t pertinenti alia η quoties $\eta = \theta^\tau$, τ vero ad ipsum t prima quantitas erit neque ullo alio casu æquivalet. Sit δ ipsius t divisor, æquivalebit etiam η^δ ipsi θ^δ. Quare, æquivalentibus

$$\theta_1,\ \theta_2, \ldots,\ \theta_a \quad \text{ipsis} \quad \eta_1,\ \eta_2, \ldots,\ \eta_a$$

resp., pro quovis exponentium valore erit

$$F\left(\theta_1^{\alpha_1}, \theta_2^{\alpha_2}, \ldots, \theta_a^{\alpha_a}\right) = F\left(\eta_1^{\alpha_1}, \eta_2^{\alpha_2}, \ldots, \eta_a^{\alpha_a}\right).$$

Art. 20. — Data sit familia a^{ti} ordinis irreductibilis

$$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a)$$

tum, exclusis k quibusvis substitutionum $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$, familiam $(a-k)^{ii}$ ordinis irreductibilem evadere patet.

Substitutiones θ_1, $\theta_2, \ldots$, θ_a quanquam familiam a^{ii} ordinis irreductibilem generantes tamen per substitutionum, quæ non omnes illi familiæ insint, numerum ipso a minorem exprimi posse concipere licet. Quare a substitutiones, quæ per minorem aliarum numerum omnino non exprimi possunt, independentes earumque familiam irreductibilem a substitutionibus independentibus affectam vocabimus. Qualem si $\theta_1^{\alpha_1}, \theta_2^{\alpha_2}, \ldots, \theta_a^{\alpha_a}$ generant, a fortiori id de substitutionibus θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_a$ confirmare potes.

Data familia a substitutionibus independentibus $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a$ affecta, exclusis harum k, familia quæ restat, $a-k$ substitutionibus independentibus erit affecta. Aliter enim familia exstaret illas $a-k$ quæ restant substitutiones amplectens, numero autem ipso $a-k$ minore substitutionum independentium affecta; quo datam familiam in alia substitutiones generatrices ipso a pauciores includente contentam esse, contra hypothesin, statim fluit.

Porro secundum definitionem familia a independentium substitutionum aliam ipso a plures continentem amplecti non potest. Quare, si ad illam novam substitutionem aggregas, familia inde orta aut a^{ii} aut $(a+1)^{ii}$ ordinis erit, et quoties a^{ii} ordinis, substitutiones generatrices independentes esse debent.

Art. **21**. — Concipiantur jam binæ substitutiones et quas generant familiæ. Quarum si quamlibet sumis, hæc generaliter in alia, quæ denuo in alia, etc., continebitur, tandem ad familiam $F(\theta_1, \theta_2)$ pervenies neque ipsam in alia ab ea diversa familia duarum substitutionum generatricum contentam. His, quas familias secundi ordinis primitivas vocare convenit, omnibus inventis, si rursus ab aliis substitutionum familiis incipitur, ad systema ab illo re vera non discrepans revenitur. Substitutiones θ_1, θ_2 autem independentes esse nec non tanquam primitivas supponi posse, inde patet, quod, posito $\theta_1 = \vartheta_1^{a_1}$, $\theta_2 = \vartheta_2^{a_2}$, $F(\theta_1, \theta_2)$ in ipsa $F(\vartheta_1, \vartheta_2)$ contenta, et quoties primitiva, eidem æqualis esse debet, quam igitur pro illa ponere permissum est.

Inde quid sub familiis tertii sive superiorum ordinum primitivis sit intelligendum videtur. Data igitur familia primitiva a^{ii} ordinis

$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a)$, erit a^{ti} ordinis irreductibilis, quod, quamvis ad oculos sit, ita demonstretur. Supposito enim, usque ad $(a-1)^{tum}$ ordinem familiam primitivam non dari omnes substitutiones implicantem, sit

$$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a) = F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{a-1}),$$

θ alia in familia non contenta substitutio, illa familia hujus $F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{a-1}, \theta)$, quæ ipso a majoris ordinis esse non potest, pars erit neque primitiva. Quando autem nulla exstat substitutio θ, quum familia data omnes substitutiones contineat, secundum suppositionem nostram ipso a minoris ordinis primitiva esse non potest. Jam sit ν^{tus} ordo primus omnes substitutiones implicans, ejusdem ordinis unam tantum exsistere familiam primitivam neque ullam majoris ordinis facile perspicitur.

Quo etiam summum substitutionum independentium in familia quadam contentarum numerum ipsi ν æqualem esse concludimus.

Art. 22. — Secundum hanc familiarum primitivarum définitionem proprietatem indicare licet, qua ab omnibus aliis differant. Data enim substitutione primitiva, quia in majore primi ordinis familia contenta esse non potest, quævis familia $F(\vartheta, \theta)$ secundi ordinis est. Vice versa autem, quoties familia quælibet $F(\vartheta, \theta)$ secundi ordinis, ϑ primitiva erit substitutio; si enim non esset, daretur familia primi ordinis ipsam $F(\vartheta)$ amplectens, etiamsi hæc quavis cum substitutione conjuncta, secundi ordinis familiam procrearet, quam in alia primi ordinis contineri non posse facile intelligis. Generalius ad familiam a^{ti} ordinis primitivam qualibet assumta substitutione, quoniam familia illa in alia ejusdem ordinis contineri non potest, familia irreductibilis $(a+1)$ substitutionibus independentibus affecta oritur. Vice versa autem, quando a substitutiones generatrices cum qualibet alia substitutione conjunctæ $(a+1)$ substitutiones independentes producunt, familiam a^{ti} ordinis primitivam constituunt; aliter enim in tali continerentur, quod cum suppositione modo facta convenire non potest.

Art. 23. — Quæritur jam de familiis, quæ in alia, veluti a^{ti} ordinis contentæ sunt, et quomodo obtineantur, et quales quorumque ordinum esse possint; utrum fieri possit, ut familia a^{ti} ordinis alias majoris

contineat, necne. Quæ autem quæstio manifesto cum hac convenit. utrum $(a+1)$ substitutiones familiam $(a+1)^{ti}$ ordinis generantes independentes esse debeant, necne. Primum vero familiam, nullam $(a+1)^{ti}$ ordinis continentem, familias majorum etiam ordinum a fortiori amplecti non posse elucet. Supposito itaque, in a^{ti} ordinis familia aliam $(a+1)^{ti}$ contentam esse, obtineretur illa adjunctis huic quibusdam substitutionibus θ, θ',.... Adjuncta igitur primum ipsa θ, postquam familias a^{ti} ordinis in aliis minoris contentas esse non posse supposuimus, quæ nascitur familia aut a^{ti} aut majoris erit ordinis; quoties postremum evenit, adjuncta nova substitutione θ' denuo familia oritur aut a^{ti} aut majoris ordinis, etc., tandem familiam exstare oportet, ipso a majoris ordinis, quæ cum substitutione quadam θ conjuncta ad a^{tum} delabatur, sive etiam fieri debet, ut, substitutione quadam θ e familia a^{ti} ordinis exclusa, alia ordinis ipso a majoris familia obtineatur.

Art. 24. — Data igitur sit familia ejusque substitutio θ; quam si ex illa excludis, aliud non agis nisi ut familiam ipsam θ non continentem inquiras, quæ cum hacce conjuncta datam familiam producat. Quam quoniam semper in formam

$$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a, \theta)$$

redigere licet plerumque quidem non irreductibilem attamen talem semper, ut ipsa $F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_a)$ irreductibilis sit, exclusa substitutione θ, hæcce familia eveniet. Quare nisi tales substitutiones θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_a$ eligi possunt, quarum ipsa θ non sit productum, hancce directe aufferre non potes, sed indirecto tantum modo, id est alias excludendo substitutiones, quibus sublatis ipsa etiam θ excipiatur. Substitutiones θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_a$ tales etiam supponere licet, quarum nulla sit productum e ceteris ipsaque θ conflatum, namque si veluti θ_1 inter tales esset, data familia ita etiam designari posset

$$F(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_a, \theta)$$

et exclusa substitutione θ resultaret familia $F(\theta_2, \ldots, \theta_a)$. Denique vero semper familiam dari, cui nullam ipsius θ potentiam directe detrahere possis, quæ vero ipsi θ conjuncta datam familiam producat, facile perspicis.

Ex. gr. quibus sub conditionibus $F(\theta)$ ipsi $F(\theta^a, \theta^b)$ ita exæquari possit ut $F(\theta^b)$ substitutionem θ^a non contineat, inquiramus. Primum autem $\theta^{ax}.\theta^{by} = \theta^{ax+by} = \theta$, id est, si θ ad exponentem t pertinet, $ax + by \equiv 1 \pmod{t}$ esse debet, quare a, b inter se primi. Secundo necesse est, ut θ^{bx} ab ipsa θ^a, sive bx ab ipso $a \pmod{t}$ pro omni ipsius x valore differat, quod quoniam a, b ipsius t divisores esse supponere possumus, obtinemus posito $b > 1$. Id autem semper fieri potest, nisi a omnes numeros primos ipsum t metientes continet. Jam sit $t = p^\pi r^\rho \ldots q^k s^\sigma \ldots$, ubi $p, r, \ldots$ numeros primos qui ipsum a metiuntur, $q, s, \ldots$ eos qui non metiuntur, designant, quivis ipsius t divisor alios nisi $q, s, \ldots$ numeros primos non continens neque ullus alius ad ipsum a erit primus. Qui quum omnes excepta unitate pro ipso b sumi possint, dantur familiæ $(k+1)(\sigma+1)\ldots - 1$

$$F(\theta^a, \theta^b),\ F(\theta^a, \theta^{b'}),\ldots$$

ipsi $F(\theta)$ æquales. Porro, quoties θ^c ipsius θ^b potentia, manente c ad ipsum a primo, erit

$$F(\theta^a, \theta^c) = F(\theta^a, \theta^b).$$

Art. 25. — Quæstiones has generales, quum difficillimæ sint, si ad superiorum ordinum familias progredi vis, in posterum referentes, alias quæstiones particulares quæ illis tanquam præparandis utiles videntur, hic etiam paullo attingamus.

Datis igitur μ substitutionibus $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu$, quarum diversa quæque elementa permutat ab aliarum nulla permutata, harum familia, pertinente generaliter θ_i ad exponentem t_i, substitutionum numerum implicabit $t_1 . t_2, \ldots t_\mu$. Generalius autem, si τ minimum ipsis $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ commune multiplum designat, familiæ $F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu)$ substitutionum numerus quasi ipsius τ multiplum evadit.

Jam sint θ_1, θ_2 substitutiones ad exponentes t_1, t_2 resp. pertinentes. Quia semper fieri debet, ut $\theta_1^{k_1}$ pro ipsius k_1 valore apte electo ipsius θ_2 potentiæ æqualis evadat, neque minus $\theta_2^{k_2}$ ipsius θ_1 potentiæ; si k_1, k_2 exponentes minimos his conditionibus convenientes designant, semper esse debet $\frac{t_1}{k_1} = \frac{t_2}{k_2}$. Quotiente hoc per t expresso, familia $F(\theta_1, \theta_2)$

omnes $\frac{t_1 t_2}{t}$ substitutiones diversas continebit hac in forma contentas

$$\theta_2^i\,\theta_1^k,\quad i < k_2,\quad k < t_1$$

quibuscum aliæ formæ $\theta_2^i\,\theta_1^k$ omnes convenient. Quæ ut familiam constituant, et poscitur et sufficiet, ut productum quodlibet in eandem formam reducere sive quamvis substitutionem $\theta_1^a\,\theta_2^b$ alii hujusmodi $\theta_2^i\,\theta_1^k$ æqualem reddere liceat.

Generalius duæ substitutionum familiæ quarum substitutiones quaslibet per θ, θ' designemus earum autem numerum per f, f'; quia familiam ex e substitutionibus η constitutam communem habebunt, substitutiones θ ita

$$\eta,\ \theta_1\,\eta,\ \theta_2\,\eta,\ldots,\ \theta_{\frac{e}{f}-1}\,\eta$$

sive breviter per $\vartheta\eta$ repræsentari possunt, omnes vero substitutiones $\theta\theta'$ cum his $\vartheta\theta'$ conveniunt. Quæ $\frac{ff'}{e}$ substitutiones diversæ familiam constituent, quando quævis $\theta'\vartheta$ harum $\vartheta\theta'$ alicui æquivalebit neque ullo alio modo. Semper vero substitutionum numerum ipso $\frac{ff'}{e}$ majorem esse affirmare licet.

Vice versa autem, data familia aliam continente, cujus membrum generale per θ designemus, quamvis substitutionem illius familiæ in formam $\theta'\theta$ sive etiam $\theta\theta'$ redigere licet. Designante igitur θ_1 quamvis familiæ F (θ') substitutionem, η autem omnes huic cum familia θ communes, illas omnes in formam $\theta'\eta$ redigere potes. Quoties itaque F (θ'), θ substitutiones communes nisi identicam non implicant, substitutiones θ' totam familiam F (θ') explent.

Art. 26. — Jam semper familiam $\frac{N}{2}$ substitutionibus affectam inveniri posse constat. Cujus termino generali per θ expresso omnes N substitutiones alteri serierum θ, $\eta\theta$ inesse debent, designante η substitutionem quandam ad exponentem parem pertinentem. Idem quoniam de quavis substitutione $\eta\theta$ affirmare potes, ii omnes, qui ad imparem pertinent exponentem itaque tota familia, cujus substitutiones generatrices omnes p^{ti} ordinis cycli sunt, designante p numerum primum

imparem, in familia θ continentur. Quare si illorum cyclorum familias diversis ipsius p valoribus respondentes et æquivalentes et $\frac{N}{2}$ substitutionibus affectas esse demonstraveris, unam tantum exsistere $\frac{N}{2}$ substitutionum familiam simul probatum erit.

Primum vero, quum omnis tertii ordinis cyclus adhibitis duobus p^{ti} ordinis cyclis, neque minus quivis p^{ti} ordinis cyclus per $\frac{p-1}{2}$ tertii obtineatur, horum cyclorum familia ut illi, quæ omnibus p^{ti} ordinis cyclis generatur, æquivaleat necesse est, sive etiam omnes hæ diversis p respondentes familiæ æquivalebunt.

Secundo autem postquam usque ad certum ipsius n valorem probatum esse supposuimus, omnium p^{ti} ordinis cyclorum familiam $\frac{N}{2}$ substitutionibus affectam esse, pro sequente etiam valore theorema, id est, continere illam familiam $\frac{1.2.3\ldots(n+1)}{2}$ substitutiones, comprobemus. Jam exsistere semper numerum primum inter n et $\frac{n+1}{2}$ contentum, $n \gtreqless 6$, inde patet, quod Tchebicheff, quoties $a > 7$, talem inter a et $\frac{a}{2}$ semper inveniri demonstravit. Dato igitur hujusmodi numero p, cycli p^{ti} ordinis n tantum $(n+1)$ elementorum certis adhibiti $\frac{N}{2}$ substitutiones familiam constituentes generabunt. Omnium vero cyclorum p^{ti} ordinis ut familiam obtineas, unam certe substitutionem talem, quam c appellabimus, adjungere debes; obtinebis igitur profecto $p.\frac{N}{2}$ substitutiones diversas

$$\theta,\ c\theta,\ c^2\theta,\ldots,\ c^{p-1}\theta.$$

Jam, quoniam $p.\frac{N}{2} > \frac{(n+1)}{2}.\frac{N}{2}$, illaque familia in alia $(n+1)\frac{N}{2}$ substitutionibus affecta contineri debet, cum illa identicam eam esse concluditur. Quod theorema, quum pro ipsius n valoribus 3, 4, 5 facile verificetur, jam generaliter probatum est.

Nullam dari familiam $\frac{N}{a}$ substitutionibus constitutam, ipso a con-

tento inter 2 et numerum primum p maximum infra n datum, statim sequitur. Quæ enim familia quum unum certe p^{ti} ordinis cyclum c non contineret, $p.\frac{N}{a}$ substitutiones diversæ darentur, quod fieri non potest.

Art. 27. — Jam utile esse potest scire, quot substitutiones ad alias omnes generandas necessariæ sint, sive cujus ordinis ν sit familia principalis omnes substitutiones implicans. Primum vero facile limitem indicere licet, quem numerus ν excedere non potest. Designentur enim per $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_3, \gamma_2$ substitutiones cyclicæ ordinum $n, n-1, \ldots, 3, 2$, resp., ubi generaliter substitutio γ_i eorum, quibus γ_{i+1} adhibetur, elementorum i permutat, omnem substitutionem in formam sequentem redigi posse

$$\gamma_n^\alpha \gamma_{n-1}^\beta \cdots \gamma_3^\rho \gamma_2^\sigma,$$

et his expressionibus, si exponentibus omnes qui locum habere possunt valores tribuuntur, totam substitutionum multitudinem implicari haud difficile perspicitur. Quo numerum ν ipso $n-1$ majorem esse non posse concludimus. Idem inde sequitur, quod omnes N substitutiones obtinentur datis omnibus transpositionibus, hæ autem per $n-1$ sequentes

$$(1, 2)\ (1, 3)\ \ldots\ (1, n).$$

Art. 28. — Jam, quibus sub conditionibus duarum substitutionum ejusdem ordinis cyclicarum η, θ familiæ præter identicam alias etiam substitutiones communes habeant inquiramus. Quod quum fieri nequeat, quoties n numerus primus, contrarium casum locum habere supponimus. Posito igitur $\eta^l = \theta^k$, quia ex. gr. k semper ipsius n divisor haberi potest, $l = ik$ esse debere facile invenitur, i quantitate ad $\frac{n}{k}$ prima. Tum substitutionis η loco talis poni potest potentia η^r, ubi r ad ipsum n prima quantitas, ut ejus potentia k^{ta} ipsi θ^k æqualis evadat. Namque necesse est, quantitatem r ad n primam talem eligere, ut

$$rk \equiv ik\ (\text{mod. } n) \quad \text{sive} \quad r \equiv i\left(\text{mod. } \frac{n}{k}\right),$$

id est $r = i + z.\frac{k}{n}$; z autem semper ita determinare licet, ut expressio illa jam ad ipsum $\frac{n}{k}$ prima divisorem cum ipso k communem non habeat. Quare ab initio substitutionem æquationi $\eta^k = \theta^k$ satisfacere supponi potest. Quum autem θ^k in k cyclos disjungatur $c_1, c_2, \ldots, c_k$, η^k in eosdem disjungi debet alio ordine instructos, quæcunque autem horum permutatio substitutionem η conditionibus satisfacientem præbebit. Quarum numerus producto $1.2.3\ldots k$ major esse non potest.

Jam sit $n = 4$; quia neque k alii quantitati atque 2 æqualis esse potest, neque ipso 1.2.3 pauciores quarti ordinis cycli, eorum autem tres familiæ inveniuntur, duo cycli quorum familiæ nisi identicam substitutiones communes non habeant, eligi possunt. Qui profecto 4.4 substitutiones itaque omnes generabunt. Hic omnibus ipsius N divisoribus familiæ respondent, quarum ordinem vel primum vel secundum esse elucet.

Art. **29.** — Porro sit $n = 5$, simili modo ordinem familiæ $\frac{N}{2}$ substitutiones continentis invenire licet. Namque duorum quinti ordinis cyclorum θ_1, θ_2 familia, quia nullam præter identicam substitutionem communem generant, certe 25 continebit terminos. Quæ si ab illa differret, cyclum quendam quinti ordinis θ_3 non implicaret, familia igitur $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 125 minimum substitutionibus constaret, id quod fieri nequit. Quare $\frac{N}{2}$ substitutionum familia secundi erit ordinis. Obtinemus eam etiam, sumtis cyclo tertii ordinis, alioque quinti; horum enim familia, nisi illam æquaret, cyclum denuo quinti ordinis non contineret, quo adjuncto familia deinde orta certe 5.15 substitutiones implicans in illa $\frac{N}{2} = 60$ substitutionibus constituta contineretur, quod absurdum est. Jam sit c_2 transpositio hac in familia non inventa, cyclus tertii ordinis c_3 elementa ab ea non permutata continens in eadem invenitur familia; designante igitur c_5 quinti ordinis cyclum, familia $F(c_2, c_3, c_5)$ principali æquivalet. Quum autem hæc: $F(c_2, c_3, c_5)$ substitutiones c_2, c_3, c_5 generet, illi æquivalebit, sive etiam familia principalis secundi erit ordinis.

Art. **30.** — Designante p numerum primum maximum infra n datum,

k autem minimum numerum talem ut $p^k > \frac{N}{4}$, ordo familiæ $\frac{N}{2}$ substitutionibus constitutæ k^{tum} excedere non potest. Erit autem generaliter minor. Posito enim ex. gr. $n = p$; denotantibus $\theta_1, \theta_2, \ldots, p^{ti}$ ordinis cyclos, substitutionum numerus familiæ horum quosdam neque alias substitutiones quasi generatrices continentis ipsius p multiplum, divisor autem numeri $\frac{1}{2}.1.2.3\ldots p$ esse debet. Sumtis vero numeris d_0, d_1, $d_2, \ldots, d_i$, quorum generaliter d_r proximum ipso $d_{r-1}.p$ majorem numeri $\frac{1}{2}.1.2\ldots(p-1)$ divisorem, d_0 unitatem designet; supposito esse i minimum valorem harum conditionum

$$d_{i-1}.p > \frac{1}{4}.1.2\ldots p, \quad d_i.p > \frac{1}{2}.1.2\ldots p$$

alteri satisfacientem, familiæ de qua agimus ordo i^{tum} certe superare non potest, i generaliter ipso k minore; ex. gr. pro $n = 7$ inveniuntur $k = 4$, $i = 3$.

Art. **51**. — Antequam hanc dissertationem finimus, de methodo etiam, qua substitutiones functionibus exprimuntur, ab ill. Galois, ni fallor, primo in analysin introducta, nostro autem tempore cl. Mathieu aliisque usitata quasdam observationes afferamus. Data enim substitutione

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \end{pmatrix},$$

si binos indices r, s secundum modulum n congruos identicos haberi convenimus, indices quilibet i, r_i in substitutione respondentes certo modo alius ab alio pendebunt; quare, posito $r_i \equiv f(i) \pmod{n}$, substitutionem per symbolum $\theta = [i, f(i)]$ repræsentare possumus. Quod, ut re vera substitutionem exprimat, valores $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ numeri integri secundum n incongrui esse debent; vice versa, hac conditione soluta, symbolum $[i, f(i)]$ certe substitutionem quandam repræsentabit. Post ipsam θ si aliam adhibes substitutionem

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$

obtinebis

$$\theta\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ r_{s_1} & r_{s_2} & r_{s_3} & \ldots & r_{s_n} \end{pmatrix}$$

quod, posito $s_i \equiv f'(i)$ itaque $r_{s_i} \equiv f(s_i) \equiv ff'(i)$, per $\theta\eta = [i, ff'(i)]$ exprimere potes. Quare $\theta^k = [i, f^k(i)]$; pertinente autem θ ad exponentem t, pro quovis ipsius i valore integro erit $f^t(i) \equiv i$. Designante $f, f', \ldots$, quasvis substitutionibus convenientes functiones, $ff'\ldots$ quoque tali conveniet, et vice versa; contra harum functionum quadam nulli substitutioni conveniente, neque productum ulli adæquatum esse potest.

Secundum has observationes omnia, quæ de ipsarum θ familiis diximus, sine ambagibus ipsis f applicare, sive posito $\theta = [i, \theta(i)]$, supra ubique sub signo θ functionem intelligere licet.

Ponamus igitur ex. gr. $\theta(i) \equiv ai + b$ (mod. n), designante jam n numerum primum; quoniam a valorem a cifra diversum habere debet, n residua incongruis ipsius i valoribus respondentia inter se differunt. Quare omnes hujusmodi functiones $n(n-1)$, quia residua pro diversis quidem functionibus, eodem autem ipsius i valore diversa sunt, eidem substitutionum diversarum numero adtinebunt. Quæ (sec. art. 25) familiam constituentes ex. gr. generatricibus $\theta'(i) \equiv ai$, designante a radicem primitivam, et $\theta''(i) \equiv i + 1$ obtinentur; familia autem, quia

$$\theta^k(i) \equiv a^k i + \frac{a^k - 1}{a - 1} b$$

itaque, nisi $a \equiv 1$, profecto $\theta^{n-1}(i) \equiv i$ erit, una ejus substitutionum generari non potest, itaque secundi erit ordinis.

Art. 32. — Attamen nescio, an hæc methodus ad difficultates problematum quæ in theoria nostra occurrunt, vincendas commoda sit. Namque et functionem mathematicam cuicunque substitutioni respondentem inveniri posse demonstratione egere, et ipsa functionum determinatio tam substitutionibus quam maxime familiis convenientium summæ difficultati obnoxia esse mihi videtur. Generalissimum vero est supponere, $\theta(i)$ implicate ipsi i conjunctum esse congruentia

$$V[i, \theta(i)] \equiv 0 \pmod{n}$$

quam si algebraicam supponimus, in formam

$$U_0 z^\alpha + U_1 z^{\alpha-1} + \ldots + U_{\alpha-1} z + U_\alpha \equiv 0$$

ubi z pro $\theta(i)$ positum, coefficientes U autem functiones ipsius i integræ sunt, redigere licet. Hæc congruentia generalis, quoniam et α et ipsius i exponentem maximum in quovis coefficiente U ipso $\varphi(n)$ majorem non esse supponere licet, hanc alteram induit formam :

$$\sum_{r=0}^{r=\varphi(n)} \left(a_{\varphi(n)}^{(r)} i^{\varphi(n)} + \ldots + a_1^{(r)} i + a_0^{(r)}\right) z^r \equiv 0,$$

in qua quantitates a tales eligendæ sunt, ut

1° Habente i valorem datum, unus ipsius z valor integer evadat neque plures; 2° percurrente i seriem quantitatum $1, 2, \ldots, n, z$, eandem quodam ordine seriem percurrat, sive etiam binæ congruentiæ diversis ipsius i valoribus respondentes et ipsi z diversos suppeditent valores. His solutis conditionibus exstat substitutio (i, z). Inveniri autem debent tot ipsorum a valorum systemata, quot substitutiones habentur.

Quod ut exemplo etiam explicetur, simplicissimum casum $n = 3$ consideremus. Quum autem congruentia

$$c_2 z^2 + c_1 z + c \equiv 0$$

modulo numero primo n, vel duas vel omnino nullam habeat radicem, congruentia in simpliciorem hanc recedit pro $n = 3$

$$(a_2 i^2 + a_1 i + a) z \equiv a'_2 i^2 + a'_1 i + a'$$

quæ, quoniam duobus ipsius i valoribus diversi ipsius z valores respondere debent, et ipsius i respectu linearis supponenda est, sive erit

$$(a_1 i + a) z \equiv a'_1 i + a'.$$

Deinde propter conditionem 1° $a_1 i + a$ pro quovis ipsius i valore a cifra differre, sive etiam $a_1 \equiv 0$, a vero a zero diversum esse debet. Quare posito $a \equiv 1$, congruentia in hanc recedit

$$z \equiv a_1 i + a \,(\text{mod. } 3)$$

qua, positis pro a_1, a omnibus præter hunc $a_1 = 0$ valoribus, omnes substitutiones pro hocce casu continentur.

VITA.

Natus sum Paulus Gustavus Henricus Bachmann Berolinensis die XXII mensis Junii anno MDCCCXXXVII, patre Friderico Joanne e regiis consiliariis ecclesiasticis, matre autem Julia e gente Lieder, quibus adhuc viventibus lætor. Fidem autem evangelicam profiteor. Quum septem annos natus essem, a parentibus viro Cl. Ranke in disciplinam traditus, primum classes prævias dein gymnasium Friderico-Guilelmum usque ad mensem Martis MDCCCLV frequentavi. Tum maturitatis testimonio instructus, postquam ad confirmandam valetudinem tempus æstivum in Helvetia transegi, civibus academicis universitatis Fridericæ-Guilelmæ Berolinensis a Rectore ill. Mitscherlich adscriptus nomen Decano ill. Dove apud facultatem philosophicam professus sum. Anno sequente Gottingiam me contuli, ubi Rectore ill. Waitz philosophiæ studiosis adscriptus scholis interfui præ omnibus Maximi Dirichlet, tum ill. ill. Weber, Woehler, Lotze, Riemann, Dedekind. Berolinum reversus, Rectore ill. Rudorff Decano ill. Kummer in civium academicorum numerum receptus sum. Scholas autem frequentavi Berolini Cel. Cel. Kummer, Encke, Magnus, Dove, Rose, Trendelenburg, Weierstrass, Poggendorff, Borchardt, Arndt.

Quibus omnibus viris optime de me meritis gratias semper quam maximas agam, neque minores præceptori carissimo ill. Schellbach, cujus institutione matheseos scientiæ adductum me esse profiteor.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LIOUVILLE A M. BESGE.

« ... Oui, la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7t^2$$

dont vous me parlez représente (proprement ou improprement) tous les nombres. Pour le prouver, il suffit de considérer les entiers

$$4^\alpha (8\mu + 7),$$

puisque tous les autres s'expriment déjà par une simple somme de trois carrés, c'est-à-dire en prenant $t = 0$. Il suffit même de considérer les entiers

$$8\mu + 7,$$

attendu qu'en faisant x, y, z, t multiples de 2^α, on se débarrasse du facteur 4^α. Les équations

$$7 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 7.1^2$$

et

$$15 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 7.1^2$$

répondent aux cas de $\mu = 0$, $\mu = 1$. Pour des valeurs de μ plus grandes, posez $t = 2$, et l'équation

$$8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + 7t^2$$

se changera en celle-ci

$$8(\mu - 3) + 3 = x^2 + y^2 + z^2,$$

laquelle est, comme on sait, toujours possible. Donc, etc. »

DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES

CONCERNANT

LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $x^2 - Ny^2 = -1$;

Par M. Casimir RICHAUD.

---

1. Nous allons, en premier lieu, résumer succinctement le procédé de Lagrange pour la résolution en nombres entiers des équations $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, dans lesquelles le déterminant N est un nombre entier positif non carré.

2. *Réduction de $\sqrt{N}$ en fraction continue.* — Lorsqu'on réduit $\sqrt{N}$ en fraction continue, les quotients incomplets forment une suite périodique; le premier de ces quotients, égal à la racine carrée a du plus grand carré a^2 contenu dans N, ne se reproduit pas; la période commence au second terme, et son dernier terme est double de l'initial a, qui n'en fait pas partie. De plus, au dernier terme près $2a$, la période est symétrique, c'est-à-dire qu'elle est la même quand on la lit en ordre rétrograde.

Les dénominateurs des quotients complets provenant du même développement de $\sqrt{N}$ forment aussi une période symétrique analogue à la période des quotients incomplets, et les seuls dénominateurs, qui puissent être égaux à l'unité, sont le premier $\frac{\sqrt{N}+0}{1} = a + \frac{1}{y}$, et ceux qui produisent le dernier terme de la période à chacun de ses retours $\frac{\sqrt{N}+a}{1} = 2a + \frac{1}{y}$. Tous les termes de la période des dénominateurs sont d'ailleurs inférieurs à $2\sqrt{N}$.

3. *Résolution en nombres entiers des équations* $x^2 - Ny^2 = \pm P$ $(P < \sqrt{N})$. — Pour que l'une de ces deux équations soit soluble en nombres entiers, il faut et il suffit que l'un des termes de la période

des dénominateurs provenant du développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue soit égal à P.

Lorsque cette condition est remplie, les valeurs entières de x et de y sont égales respectivement au numérateur et au dénominateur des réduites qui précèdent le quotient complet dont le dénominateur est P à chacun de ses retours. En d'autres termes, si $\frac{H}{H'}$ représente l'une de ces réduites, on a toujours

$$H^2 - NH'^2 = \pm P. \tag{1}$$

Le deuxième membre de cette égalité doit être pris avec le signe $+$ si la réduite $\frac{H}{H'}$ est de rang impair, et avec le signe $-$ dans le cas contraire. $\left(\text{Dans cette évaluation des rangs, la première réduite est supposée égale à } \frac{1}{0}\cdot\right)$

Le théorème compris dans l'égalité (1) peut s'énoncer de la manière suivante : *Le résultat de la substitution des deux termes d'une réduite quelconque $\frac{H}{H'}$ déduite du développement de $\sqrt{N}$, à la place de x et de y dans l'expression $x^2 - Ny^2$, est égal au dénominateur de la complète suivante pris avec son signe si $\frac{H}{H'}$ est de rang impair, et en signe contraire si $\frac{H}{H'}$ est de rang pair.*

4. *Résolution en nombres entiers des équations $x^2 - Ny^2 = \pm 1$.* — Résumons, toujours d'après Lagrange, les conditions qui doivent être remplies pour que ces équations soient possibles en nombres entiers.

Si les deux périodes signalées ci-dessus (n° 2) présentent un nombre pair de termes, auquel cas il y a dans chacune d'elles un terme du milieu de la symétrie qui ne se reproduit pas, les réduites qui précéderont le quotient complet $\frac{\sqrt{N}+a}{1}$, à chacun de ses retours, seront toujours de rang impair. Donc, dans ce cas, l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ aura une infinité de solutions entières, et l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ n'en admettra aucune de cette nature (n° 3).

Si les mêmes périodes contiennent un nombre impair de termes, c'est-à-dire si elles renferment au milieu de la partie symétrique deux termes consécutifs égaux entre eux, les réduites qui précèdent le quotient complet $\frac{\sqrt{N}+a}{1}$, aux périodes de rang impair, seront toujours de rang pair. Donc, dans ce cas, chacune de ces réduites fournira une solution entière de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$. De même, les réduites qui précèdent la fraction complète $\frac{\sqrt{N}+a}{1}$, aux périodes de rang pair, seront toujours de rang impair, et par suite chacune d'elles donnera une solution entière de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$.

Ainsi, en résumé, lorsque le déterminant N est un nombre positif non carré, l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ admet toujours des solutions entières, et, pour que l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ admette des solutions de la même nature, il faut et il suffit que les deux périodes provenant du développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue contiennent un nombre impair de termes.

Pour simplifier le langage, nous formulerons cette dernière condition de la manière suivante : *L'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ est toujours possible en nombres entiers, lorsque les périodes provenant du développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue ne présentent pas de terme du milieu.*

5. La condition qu'on vient d'énoncer est peu utile dans la pratique, parce qu'elle ne dispense pas de trouver une première solution entière de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$, lorsqu'on veut reconnaître la possibilité des solutions de cette nature.

On peut cependant faire un pas de plus, et établir une condition nécessaire mais non suffisante, qui doit être remplie par le nombre N, pour que la même équation admette des solutions entières. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad Ny^2 = x^2 + 1.$$

On reconnaît ainsi immédiatement que tous les facteurs premiers de N divisent une somme de deux carrés premiers entre eux ; par cela

même ces facteurs sont eux-mêmes égaux à la somme de deux carrés, ou, en d'autres termes, tous les facteurs premiers impairs de N sont de la forme $4n+1$, lorsque l'équation (1) admet des solutions entières.

Dans cette dernière hypothèse, le facteur 2 ne peut d'ailleurs entrer qu'une fois dans N. Car si N est pair x, sera impair, et le second membre de l'équation (1) sera de la forme $8n+2$. Ce deuxième membre ne pourra donc contenir qu'une fois le facteur 2, et par suite N sera dans le même cas.

Ainsi, *pour que l'équation* $x^2 - Ny^2 = -1$ *admette des valeurs entières, il faut que tous les facteurs premiers de* N *ou de* $\frac{N}{2}$ *soient de la forme* $4n+1$.

Cette condition n'est pas suffisante; elle est remplie pour le nombre 178 par exemple, et cependant l'équation $x^2 - 178y^2 = -1$ n'admet pas de solutions entières. Nous verrons plus loin que cette équation ne peut pas être soluble en nombres entiers, parce que 178 étant de la forme $8n+2$ ses deux carrés composants 13^2 et 3^2 ont des racines carrées des formes $8n+3$, $8n+5$ (n^{os} **8** et **15**).

6. Ces préliminaires posés, nous allons démontrer quelques théorèmes qui permettront de formuler, dans une série de cas, des conditions rigoureuses de possibilité en nombres entiers pour l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$.

Théorème. — *Lorsque les parties symétriques des périodes provenant du développement de* $\sqrt{N}$ *en fraction continue ont un terme du milieu, le dénominateur du quotient complet, qui fournit ce terme du milieu, est un diviseur de* 2N *et aussi un diviseur du double du numérateur de la réduite précédente.*

Considérons les deux périodes provenant du développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue, savoir :

Quotients incomplets. . . . $a, (b, c, \ldots, g, h, m, h, g, \ldots, c, b, 2a)$.

Dénominateurs. . . . . . . $(1, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \rho, \mu, \rho, \varepsilon, \ldots, \gamma, \beta)\ 1, \ldots$

Nous représentons ici par m et μ les termes du milieu des deux

périodes, et nous avons à démontrer que μ est un diviseur des nombres $2N$ et $2H$ $\left(H\right.$ étant le numérateur de la réduite $\frac{H}{H'}$ correspondante au quotient incomplet h qui précède immédiatement $\left.m\right)$.

Les trois réduites consécutives $\frac{G}{G'}$, $\frac{H}{H'}$, $\frac{M}{M'}$ placées par ordre de grandeur, et correspondantes aux quotients incomplets g, h, m, nous donneront (n° 5) les relations suivantes :

$$(1) \qquad NH'^2 = H^2 \pm \mu,$$

$$(2) \qquad NG'^2 = G^2 \mp \rho,$$

$$(3) \qquad NM'^2 = M^2 \mp \rho.$$

D'après la loi de formation des réduites, nous avons $M = Hm + G$, $M' = H'm + G'$, ce qui donne la nouvelle relation

$$(4) \qquad \frac{M - G}{M' - G'} = \frac{H}{H'}.$$

L'élimination de ρ entre (2) et (3) donne $N(M'^2 - G'^2) = M^2 - G^2$, ou, en ayant égard à la relation (4),

$$(5) \qquad N(M' + G')H' = (M + G)H.$$

En combinant cette dernière relation avec l'égalité (1), il viendra

$$NH'[(HG' - GH') - (MH' - M'H)] = \mp \mu(M + G).$$

Or, d'après les propriétés des réduites, la valeur absolue des différences $HG' - GH'$, $MH' - M'H$ est égale à l'unité, de telle sorte qu'en ayant égard à la corrélation des signes, nous aurons finalement

$$(6) \qquad 2NH' = \mu(M + G).$$

Cette dernière relation prouve que $2NH'$ est divisible par μ. Mais le nombre H' est premier avec μ, en vertu de la relation (1), parce que, dans le cas contraire, H et H' auraient un facteur commun, ce qui est

impossible puisque $\frac{H}{H'}$ est une réduite. Le nombre $2N$ est donc divisible par μ.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, remplaçons dans (5) N par sa valeur déduite de (1), nous aurons

$$(H^2 \pm \mu)(M' + G') = (M + G)HH'$$

ou

$$\pm \mu (M' + G') = H[(MH' - M'H) + (GH' - HG')],$$

ou, en ayant égard à la corrélation des signes,

$$(7) \qquad 2H = \mu(M' + G').$$

Ainsi, $2H$ est divisible par μ.

7. *Remarque.* — Lorsque, dans le développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue, aucun dénominateur des quotients complets ne pourra être égal à un diviseur de $2N$, l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ sera toujours possible en nombres entiers (nº 4).

La réciproque n'est pas exacte, ou, en d'autres termes, la même équation pourra admettre des solutions entières, même dans le cas où certains dénominateurs des quotients complets seraient des diviseurs de $2N$. C'est ce qui arrive en particulier pour l'équation $x^2 - 925y^2 = -1$ qui admet des solutions entières, malgré que le nombre 25, diviseur du déterminant, se trouve dans la période des dénominateurs des quotients complets. Mais la réciproque sera évidemment vraie, si aucun dénominateur ne peut être simultanément un diviseur des deux nombres $2N$ et $2H$. Il était donc indispensable d'établir la deuxième partie du théorème précédent, au point de vue de la recherche des conditions de possibilité de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$.

8. Théorème. — *Lorsque le développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue ne présente pas de terme du milieu, auquel cas l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ est soluble en entiers, le terme qui se répète, au milieu de la période des dénominateurs, est égal à la racine carrée de l'un des carrés composants du nombre* N.

Considérons les deux périodes provenant du développement de $\sqrt{\mathrm{N}}$:

Quotients incomplets. . . $a, [b, c, \ldots, h, r, r, h, \ldots, c, b, 2a]$,
Dénominateurs. . . . . . $[1, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \rho, \rho, \varepsilon, \ldots, \gamma, \beta], 1 \ldots$

et représentons par u le quotient complet

$$u = r + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{h + \ddots}},$$

ce quotient sera de la forme

$$u = \frac{\sqrt{\mathrm{N}} + p}{\rho} = r + \frac{1}{v},$$

d'où

$$\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{\sqrt{\mathrm{N}} - (\rho r - p)}{\rho}$$

et

$$v = \frac{\rho(\sqrt{\mathrm{N}} + \rho r - p)}{\mathrm{N} - (\rho r - p)^2},$$

par suite, comme par hypothèse le dénominateur de v est égal à ρ, nous aurons

$$\mathrm{N} = (\rho r - p)^2 + \rho^2.$$

Le carré du dénominateur ρ, qui se reproduit deux fois consécutives au milieu de la période, est donc l'un des carrés composants du nombre N.

9. *Remarque.* — Il est facile de voir que, dans la période des dénominateurs du développement de $\sqrt{\mathrm{N}}$, deux termes consécutifs ne peuvent être simultanément pairs. Donc, dans le cas du théorème précédent, le carré composant de N, dont la racine se reproduit deux fois consécutives dans la période des dénominateurs, est toujours impair.

10. Dans le cas du même théorème, on démontrerait facilement qu'en représentant par $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}$ et $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}$ les réduites consécutives, qui correspondent aux quotients incomplets h, r de la première période, les nom-

bres $y = \mathrm{H}'^2 + \mathrm{R}'^2$, et $x = \mathrm{HH}' + \mathrm{RR}'$ constitueraient la plus petite solution entière de l'équation $x^2 - \mathrm{N}y^2 = -1$.

11. Théorème. — *Si* N *est de la forme* $8n+1$, *les dénominateurs pairs des quotients complets, qu'on obtient en réduisant* $\sqrt{\mathrm{N}}$ *en fraction continue, sont forcément des multiples de* 8.

Soit $2p$ un dénominateur pair et $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}$ la réduite précédente, nous aurons (n° 3)

$$\mathrm{H}^2 - \mathrm{NH}'^2 = \pm 2p.$$

H et H′ sont ici impairs; H^2 et H'^2 sont donc l'un et l'autre de la forme $8n+1$, à laquelle le déterminant N se rattache d'après l'énoncé. Mais alors la différence $2p$ entre H^2 et NH'^2 est nécessairement un multiple de 8, ce qui démontre la proposition.

12. Théorème. — *Si* N *est de la forme* $8n+5$, *les dénominateurs pairs des quotients complets, provenant du développement de* $\sqrt{\mathrm{N}}$ *en fraction continue, sont forcément des multiples de* 4.

En conservant les notations du théorème précédent, nous aurons

$$\mathrm{H}^2 - \mathrm{NH}'^2 = \pm 2p,$$

et comme H^2 et H'^2 sont nécessairement de la forme $8n+1$, la différence $\mathrm{H}^2 - (8n+5)\mathrm{H}'^2$ est toujours de la forme $8n+4$, ce qui démontre le théorème.

13. *Remarque.* — Il résulte des deux théorèmes précédents que les deux équations

$$x^2 - \mathrm{N}y^2 = \pm 2, \quad x^2 - \mathrm{N}y^2 = \pm 2(2a+1)$$

sont impossibles en valeurs entières de x et de y pour tout déterminant N de la forme $4n+1$.

14. Théorème. — *Si* N *est de la forme* $8n+2$, *les dénominateurs pairs des quotients complets, qu'on obtient en réduisant* $\sqrt{\mathrm{N}}$ *en fraction continue, ne peuvent contenir qu'une fois le facteur* 2.

En représentant par $2p$ un dénominateur pair, nous aurons

$$H^2 - NH'^2 = \pm 2p.$$

Dans cette relation H est pair et H′ impair; par suite H^2 est de l'une des formes $8n$ ou $8n+4$, tandis que NH'^2 est de la forme $8n+2$. La différence $H^2 - NH'^2$ ne peut donc contenir qu'une fois le facteur 2, ce qui démontre le théorème.

On arriverait à la même conclusion dans le cas où N serait de la forme $8n+6$.

15. Théorème. — *Si* N *est de la forme* $8n+2$, *les dénominateurs impairs des quotients complets, qu'on obtient en réduisant* $\sqrt{N}$ *en fraction continue, ne sont jamais de l'une des deux formes* $8n+3$, $8n+5$.

$2p+1$ désignant un dénominateur impair, nous aurons

$$H^2 - NH'^2 = \pm(2p+1).$$

Ici H est impair, tandis que H′ peut être pair ou impair; par suite,

$$H^2 = 8n+1 \quad \text{et} \quad NH'^2 = \begin{cases} 8n, \\ 8n+2. \end{cases}$$

La différence $H^2 - NH'^2$ sera toujours de l'une des deux formes $8n+1$, ou $8n+7$, ce qui démontre la proposition.

16. Théorème. — *Si* N *est de la forme* $5n$, *les dénominateurs des quotients complets, provenant de la réduction de* $\sqrt{N}$ *en fraction continue, ne sont jamais de l'une des deux formes* $5n+2$, $5n+3$.

En désignant par d l'un de ces dénominateurs, nous aurons

$$H^2 - NH'^2 = \pm d.$$

Il est facile de voir que, par rapport au module 5, H^2 ne pourra être que de l'une des trois formes suivantes :

$$5n, \quad 5n+1, \quad 5n+4,$$

et comme, par hypothèse, NH'^2 est de la forme $5n$, la différence $H^2 - NH'^2$ ne sera jamais de l'une des formes $5n+2$, $5n+3$, indiquées ci-dessus.

17. *Remarque.* — Sans multiplier davantage ces théorèmes, qui se rattachent à la théorie des résidus quadratiques, nous nous bornerons à énoncer le suivant :

Si N *est de la forme* $3n+2$, *aucun dénominateur des quotients complets, provenant de la réduction de* $\sqrt{N}$ *en fraction continue, ne sera divisible par* 3.

18. Théorème. — *Lorsque* $N = a^\alpha b^6 c^\gamma \ldots$ *contient des facteurs premiers* a, b, c, *élevés à des puissances supérieures à la première, le terme du milieu, dans la période des dénominateurs provenant de la réduction de* $\sqrt{N}$ *en fraction continue, ne peut pas contenir un facteur premier* a, *affecté d'une puissance inférieure à l'indice de ce même facteur dans* N.

Admettons, conformément à l'hypothèse de l'énoncé, qu'il existe un terme du milieu dans la période des dénominateurs, et représentons par $\mu = a^{\alpha-n}p$ ce terme, que nous supposerons d'abord impair, nous aurons (n° 5)

$$(1) \qquad H^2 - a^\alpha b^6 c^\gamma \ldots H'^2 = \pm a^{\alpha-n}p.$$

On sait (n° 6) que le terme du milieu μ est un diviseur des nombres $2N$ et $2H$, nous aurons donc la relation $H = a^{\alpha-n}p \times h$. Substituons cette valeur dans (1), il viendra

$$a^{2\alpha-2n}p^2h^2 - a^\alpha b^6 c^\gamma \ldots H'^2 = \pm a^{\alpha-n}p,$$

ou

$$a^{\alpha-n}ph^2 - a^n KH'^2 = \pm 1,$$

relation impossible, si n n'est pas nul, puisque le deuxième membre est égal à l'unité, tandis que, d'après les conditions de l'énoncé, les termes du premier membre contiendraient tous les deux le facteur a.

On verrait d'une manière analogue que l'égalité (1) est impossible en

valeurs entières, lorsque $a^{\alpha-n}p$ est pair. Le théorème est donc démontré.

19. Théorème. — *Si l'équation $x^2 - a^\alpha b^6 c^\gamma \ldots y^2 = -1$, dans laquelle a, b, c,..., désignent des facteurs premiers $4n+1$, admet des solutions entières, il en sera de même de l'équation*

$$x^2 - a^{\alpha+2} b^6 c^\gamma \ldots y^2 = -1,$$

qui se déduit de la première par l'addition de deux unités à l'exposant de l'un des facteurs premiers du déterminant.

Posons $a^\alpha b^6 c^\gamma \ldots = \mathrm{N}$, et considérons la plus petite solution entière $x = p, y = q$ de l'équation

$$x^2 - \mathrm{N} y^2 = -1; \tag{1}$$

on sait que dans l'égalité

$$(p + q\sqrt{\mathrm{N}})^{2k+1} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1\sqrt{\mathrm{N}}$$

les nombres entiers $x = \mathrm{P}_1$, $y = \mathrm{Q}_1$ représentent toujours une solution de l'équation (1). Cela étant, considérons la solution de la même équation déduite de l'exposant impair et premier $4n + 1 = a$. Dans la relation

$$(p + q\sqrt{\mathrm{N}})^a = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{N}}, \tag{2}$$

nous aurons

$$\mathrm{Q} = ap^{a-1}q + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\ 2\ 3} p^{a-3} q^3 \mathrm{N} + \ldots + q^a \mathrm{N}^{\frac{a-1}{2}}.$$

Or, comme a est premier, tous les coefficients de cette expression de Q, à l'exception de celui du dernier terme, sont divisibles par a. Ainsi, puisque N contient a, la solution entière de l'équation (1), déduite de la relation (2), pourra se mettre sous la forme

$$x = \mathrm{P}, \quad y = \mathrm{Q} = a\mathrm{Q}_2.$$

Substituant dans (1), nous aurons

$$P^2 - N(Q_2 a)^2 = -1,$$

égalité qui prouve que l'équation $x^2 - a^{\alpha+2} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots y^2 = -1$ admet des solutions entières.

On comprend facilement que le raisonnement précédent est admissible dans le cas où le déterminant N est pair. Il suffira, pour que le théorème soit encore vrai dans ce cas, que le facteur premier de N, dont on augmente l'exposant de 2 unités, soit impair.

20. Corollaire. — *Si l'équation $x^2 - pa^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots y^2 = -1$ admet des solutions entières, il en sera de même de l'équation*

$$x^2 - pa^{\alpha+2\alpha'} b^{\beta+2\beta'} c^{\gamma+2\gamma'} \ldots y^2 = -1,$$

qui dérive de la première par l'addition d'un nombre pair quelconque aux exposants des facteurs premiers impairs qui entrent dans le déterminant.

Ainsi, comme l'équation $x^2 - Ay^2 = -1$ admet toujours des solutions entières lorsque A désigne un nombre premier $4n+1$, il en sera de même de l'équation $x^2 - A^{2\alpha+1} y^2 = -1$.

21. Réciproquement, lorsqu'on aura à rechercher si une équation telle que

$$(1) \qquad x^2 - a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \ldots l^{2\lambda+1} A^{2a} B^{2b} \ldots L^{2l} y^2 = -1$$

est soluble en entiers, il est évident, d'après le théorème qui précède, qu'en ramenant à la première puissance les exposants impairs des facteurs $a, b, \ldots, l$, et à la deuxième puissance les exposants pairs des facteurs A, B, ..., L, il faudra, et il suffira, pour que cette équation (1) soit soluble en entiers, qu'il en soit de même de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - ab \ldots l A^2 B^2 \ldots L^2 y^2 = -1.$$

De plus, on constate de suite que la possibilité de l'équation (2)

entraîne celle de l'équation suivante :

$$(3)\qquad x^2 - ab\ldots ly^2 = -1.$$

Mais la possibilité de cette dernière équation en valeurs entières de x et de y ne suffit pas pour qu'on puisse en conclure celle de l'équation (2). Ainsi, par exemple, l'équation $x^2 - 2.13y^2 = -1$ admet des valeurs entières de x et de y, tandis que l'équation $x^2 - 2.13.5^2y^2 = -1$ ne peut pas être satisfaite par des valeurs de même nature. Dans cette dernière équation, en effet, le déterminant $N = 2.13.5^2 = 650 = 25^2 + 25$, ou $N = a^2 + d$ (d étant un diviseur autre que l'unité du double $2a$ de la partie entière de la racine carrée de N). Or, dans ce cas, le développement du nombre littéral $\sqrt{a^2 + d}$ en fraction continue est toujours possible, et la période des dénominateurs a un terme du milieu égal à d, ce qui prouve (n° 4) que l'équation $x^2 - (a^2 + d)y^2 = -1$ est toujours impossible en valeurs entières de x et de y, dans le cas où d satisfait aux conditions précitées. Dans la même hypothèse, la plus petite solution en valeurs entières de l'équation $x^2 - (a^2 + d)y^2 = 1$ serait $x = \frac{2a^2}{d} + 1$, $y = \frac{2a}{d}$. Le signe de d pourrait même être changé, ou, en d'autres termes, si a surpasse d'une unité la racine carrée du plus grand carré contenu dans N, et si d est un diviseur de $2a$ autre que l'unité, la plus petite solution en valeurs entières de l'équation $x^2 - (a^2 - d)y^2 = 1$ sera $x = \frac{2a^2}{d} - 1$, $y = \frac{2a}{d}$.

Toutefois, il existe des cas nombreux pour lesquels la possibilité de l'équation (3) entraîne celle des équations (2) et (1); ces cas sont compris dans la proposition suivante.

22. Théorème. — *Si l'équation $x^2 - ab\ldots ly^2 = -1$ admet des valeurs entières, et si* A, B,..., L *représentent des nombres premiers* $4n+1$ *non compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - ab\ldots lu^2$, *l'équation* $x^2 - ab\ldots l\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\ldots\mathrm{L}^2y^2 = -1$ *sera aussi soluble en nombres entiers.*

Considérons d'abord l'équation $x^2 - ab\ldots l\mathrm{A}^2y^2 = -1$; nous allons établir le théorème en démontrant que, si A satisfait aux conditions de l'énoncé, le développement de $\sqrt{ab\ldots l\mathrm{A}^2}$ en fraction con-

tinue ne peut pas présenter de terme du milieu dans la période des dénominateurs. Nous représenterons par la lettre μ le dénominateur du milieu de la période, et nous rappellerons que, lorsque ce terme μ se rencontre dans le développement de $\sqrt{N}$, il est toujours un diviseur des nombres $2N$ et $2H$.

Cela posé, les diviseurs de $2ab\ldots l$ étant déterminés et inscrits les uns à la suite des autres, en multipliant successivement ces diviseurs par 1, ce qui les reproduira, ensuite par A et enfin par A^2, on obtiendra tous les diviseurs de $2ab\ldots lA^2$. Ainsi, en représentant par α un diviseur quelconque de $2ab\ldots l$, les diviseurs de $2ab\ldots lA^2$ se rattacheront à l'un des trois types suivants :

$$\alpha,\quad \alpha A,\quad \alpha A^2.$$

Or, il est facile de voir qu'aucun nombre de ces types ne pourra être égal à la valeur de μ dans le développement de $\sqrt{ab\ldots lA^2}$ en fraction continue.

Si, dans ce développement, on pouvait avoir $\mu = \alpha$, il résulterait de l'égalité

$$H^2 - ab\ldots l(A^2H'^2) = \pm\alpha$$

que le même nombre α serait également admissible pour μ dans le développement de $\sqrt{ab\ldots l}$, ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé, puisque, par hypothèse, l'équation $x^2 - ab\ldots ly^2 = -1$ admet des solutions entières.

La valeur $\mu = \alpha A$ ne peut pas être admise, d'après ce qui a été démontré (n° **18**).

Enfin, si $\mu = \alpha A^2$ était admissible, nous aurions l'égalité

$$H^2 - ab\ldots lA^2H'^2 = \pm\alpha A^2,$$

et, comme $H = \alpha A^2 h$, cette égalité peut se mettre sous la forme

$$(\alpha Ah)^2 - ab\ldots lH'^2 = \pm\alpha,$$

relation qui prouve que, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, $\mu = \alpha$ serait admissible dans le développement de $\sqrt{ab\ldots l}$ en fraction con-

tinue, ce qui est impossible, ainsi qu'on l'a vu dans le cas précédent. Il est donc également impossible qu'on puisse avoir $\mu = \alpha A^2$ dans le développement de $\sqrt{ab\ldots lA^2}$.

Il reste toutefois à prouver cette dernière impossibilité, dans le cas où α serait égal à 1, c'est-à-dire pour $\mu = A^2$. Nous aurions, dans cette hypothèse,

$$H^2 - ab\ldots lA^2 H'^2 = \pm A^2.$$

Ici $H = A^2 h$, et, par suite,

$$A^2 h^2 - ab\ldots l H'^2 = \pm 1,$$

A serait donc un diviseur de $t^2 \pm ab\ldots lu^2$, ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé. Le théorème est donc démontré dans le cas de l'équation $x^2 - ab\ldots lA^2 y^2 = -1$.

En considérant l'équation $x^2 - ab\ldots lA^2 B^2 y^2 = -1$, le théorème s'établirait de la même manière; car l'équation $x^2 - ab\ldots lA^2 y^2 = -1$ admet des solutions entières, et, de plus, B n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - abl\ldots A^2 u^2$. La proposition s'étend donc à un nombre quelconque de facteurs A, B, ..., L, remplissant les conditions de l'énoncé.

Corollaire. — *Si l'équation $x^2 - ab\ldots ly^2 = -1$ admet des solutions entières, et si les facteurs premiers* A, B, ..., L, *de la forme $4n+1$, ne sont pas compris dans les diviseurs de $t^2 - ab\ldots lu^2$, l'équation $x^2 - a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1}\ldots l^{2\lambda+1} A^{2a} B^{2b}\ldots L^{2l} y^2 = -1$ admettra aussi des solutions entières* (n° **19**).

23. Théorème. — *Si* A, B, C, ..., L *représentent des nombres premiers de la forme $8n+5$, les équations*

$$x^2 - 2Ay^2 = -1,$$
$$x^2 - 2ABy^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^2B^2C^2\ldots L^2 y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

Nous démontrerons ce théorème en suivant la méthode du numéro précédent.

1° $x^2 - 2Ay^2 = -1$. Les diviseurs du double du déterminant N inférieurs à $2\sqrt{N}$ sont 2 et 4. Or, comme 2A est de la forme $8n+2$, $\mu = 4$ est inadmissible dans la période des dénominateurs (n° **14**).

Il en est de même de $\mu = 2$; car, dans cette hypothèse, nous aurions

$$H^2 - 2AH'^2 = \pm 2,$$

relation impossible, parce que A, qui est de la forme $8n+5$, serait diviseur linéaire de $t^2 \pm 2u^2$, ce qui n'a jamais lieu. Donc le développement de $\sqrt{2A}$ en fraction continue ne peut pas avoir de terme du milieu de la période, et, par suite (n° **4**), l'équation $x^2 - 2Ay^2 = -1$ admet toujours des solutions entières.

2° $x^2 - 2ABy^2 = -1$. Les douze diviseurs de 4AB sont :

$$1,\ 2,\ 4,\ A,\ 2A,\ 4A,\ B,\ 2B,\ 4B,\ AB,\ 2AB,\ 4AB.$$

Rejetant l'unité, le facteur 2 d'après ce qu'on a dit au cas précédent, les multiples de 4 (n° **15**), et les nombres supérieurs à $2\sqrt{2AB}$, les seules valeurs, que pourrait prendre μ, parmi ces diviseurs, sont

$$(A,\ 2B),\ (B,\ 2A);$$

$\mu = A$ et $\mu = B$ sont inadmissibles (n° **15**), il ne reste donc à considérer que les diviseurs conjugués de ces deux derniers 2A et 2B. Or, en général, si un diviseur B n'est pas admissible pour μ, il en est de même de son diviseur conjugué 2A. C'est ce que nous allons reconnaître dans ce cas particulier. Supposons, en effet, qu'on puisse avoir $\mu = 2A$, il en résulterait :

$$H^2 - 2ABH'^2 = \pm 2A,$$

ou bien, en vertu de la relation $H = 2Ah$,

$$2Ah^2 = BH'^2 \pm 1.$$

Dans cette relation H′ est impair, puisque H et H′ sont les termes d'une

même réduite, par suite BH'^2 est de la forme $8n+5$ et $BH'^2 \pm 1$ de l'une des deux formes $8n+4$, $8n+6$. D'un autre côté, le premier membre $2Ah^2$ de la même relation ne peut être que de l'une des deux formes $8n$, $8n+2$. Cette dernière relation est donc impossible en valeurs entières de h et de H', et, par suite, $\mu = 2A$ est inadmissible.

Il en serait de même de $\mu = 2B$, ce qui démontre le théorème pour le second cas $x^2 - 2ABy^2 = -1$.

3° $x^2 - 2A^2B^2C^2 \ldots L^2 y^2 = -1$. On sait que l'équation $x^2 - 2y^2 = -1$ admet toujours des solutions entières; on sait de plus que les nombres A, B, ..., L, supposés premiers de la forme $8n+5$, ne sont jamais compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2u^2$. Ce troisième cas est donc démontré, puisqu'il rentre dans le théorème établi (n° **22**).

24. Il résulte immédiatement des théorèmes démontrés (n^{os} **20** et **23**) que, *si* A, B, C, ..., L *représentent des nombres premiers* $8n+5$, *les équations*

$$x^2 - 2A^\alpha y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1} y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha}B^{2\beta}C^{2\gamma} \ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

admettent toujours des solutions entières.

25. *Remarque.* — On voit, d'après le théorème précédent, que si deux facteurs premiers A et B de la forme $8n+5$ sont combinés avec le facteur 2, l'équation $x^2 - 2A^m B^n y^2 = -1$ est toujours possible en nombres entiers, lorsque les exposants m et n sont de même parité. Mais, si les exposants de A et de B sont de parité différente, l'équation correspondante peut ne pas être soluble en valeurs entières de x et de y. On en voit un exemple dans l'équation $x^2 - 2 \cdot 5 \cdot 13^2 y^2 = -1$, qui n'est jamais vérifiée par des valeurs entières.

Toutefois, il résulte du théorème (n° **20**) que si les nombres premiers A et B de la forme $8n+5$ sont tels, que B ne soit pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$, l'équation $x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta} y^2 = -1$ admettra toujours des solutions entières.

Cette dernière proposition peut d'ailleurs (n^{os} **20** et **22**) être généralisée de la manière suivante :

Théorème. — *Si* B, C, ..., L *représentent des nombres premiers* $8n+5$, *et* $a, b, \ldots, l$ *des nombres premiers* $8n+1$, *qui ne soient compris ni les uns ni les autres dans les diviseurs linéaires du nombre quadratique* $t^2 - 2Au^2$, *dans lequel* A *représente aussi un facteur premier* $8n+5$, *l'équation*

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta}\ldots L^{2\lambda}a^{2m}b^{2n}\ldots l^{2p}y^2 = -1$$

admet toujours des solutions entières.

26. Théorème. — *Si* A, B, C *désignent des nombres premiers de la forme* $8n+5$, *et si* B *et* C *ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - 2Au^2$, *les équations*

$$x^2 - 2ABCy^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^2BCy^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

1° $x^2 - 2ABCy^2 = -1$. Les diviseurs de $4ABC$ sont au nombre de 24; en excluant : 1° le facteur 2, 2° ceux qui sont des multiples de 4 (n° **14**), 3° ceux qui sont de la forme $8n+5$ (n° **15**) et les facteurs conjugués de ces derniers, tels que $2AB$, $2AC$, $2BC$, 4° ceux qui sont plus grands que $2\sqrt{2ABC}$; et en ne considérant qu'une fois ceux qui sont symétriques, tels que $2B$ et $2C$, AB et AC, ces 24 diviseurs se réduisent aux quatre suivants :

$$(2A,\ BC),\quad (2B,\ AC),$$

et ces diviseurs peuvent s'assembler deux à deux en groupes de facteurs conjugués dont le produit est égal à $2ABC$.

Pour établir le théorème, il suffira donc de démontrer que le nombre que nous avons désigné par μ, ne peut être égal à aucun de ces quatre diviseurs.

Dans l'une des hypothèses $\mu = 2A$, $\mu = BC$, nous aurions, après la réduction connue consistant en ce que μ est toujours un diviseur de $2H$, la relation

$$(\mu = 2A,\ BC)\quad 2Ah^2 - BCH'^2 = \pm 1.$$

Or, cette relation est impossible en valeurs entières de h et de H', puisque, d'après l'énoncé, B et C ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 \pm 2Au^2$. L'hypothèse $\mu = 2A$ ou $\mu = BC$ est donc inadmissible.

Supposons en deuxième lieu qu'on puisse avoir $\mu = 2B$ ou $\mu = AC$, il en résulterait, après la réduction connue, la relation

$$(\mu = 2B, AC), \quad 2Bh^2 - ACH'^2 = \pm 1.$$

Si, dans cette relation, h et H' admettaient des valeurs entières, A serait un diviseur de $t^2 \pm 2Bu^2$. Or, comme les nombres premiers A et B sont de la forme $8n + 5$, il est facile de prouver que *si* B *ne divise pas la formule* $t^2 + 2Au^2$, *réciproquement* A *ne divisera pas la formule* $t^2 + 2Bu^2$.

En conservant la notation de Legendre $\left(\frac{N}{C}\right)$ pour exprimer le reste de la division du nombre $N^{\frac{C-1}{2}}$ par le facteur premier C, reste qui, d'après le théorème de Fermat, est toujours égal à $+1$ ou à -1, nous aurons en effet, puisque, d'après l'énoncé, B ne divise pas $t^2 + 2Au^2$, l'égalité

$$\left(\frac{2A}{B}\right) = -1;$$

mais comme B est de la forme $8n + 5$, on sait que $\left(\frac{2}{B}\right) = -1$; par suite $\left(\frac{A}{B}\right) = 1$. Donc, d'après la loi de réciprocité, $\left(\frac{B}{A}\right) = 1$, et comme $\left(\frac{2}{A}\right) = -1$, nous aurons enfin $\left(\frac{2B}{A}\right) = -1$, égalité qui prouve que A n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 + 2Bu^2$.

Il n'est pas nécessaire de rappeler d'ailleurs que tout nombre premier $4n + 1$, qui ne divise pas la formule $t^2 + au^2$, ne divise pas non plus la formule $t^2 - au^2$. L'hypothèse $(\mu = 2B, AC)$ est donc inadmissible et le premier cas du théorème est démontré.

2° $x^2 - 2A^2BCy^2 = -1$. D'après l'énoncé du théorème les nombres premiers B et C de la forme $8n + 5$ ne sont pas diviseurs de $t^2 + 2Au^2$; il est facile de prouver par suite que réciproquement A

n'est pas diviseur de t^2+2BCu^2. Puisque B et C ne divisent pas t^2+2Au^2, nous avons, en effet,

$$\left(\frac{2A}{B}\right)=-1,\quad \left(\frac{2A}{C}\right)=-1;$$

mais comme $\left(\frac{2}{B}\right)=\left(\frac{2}{C}\right)=-1$, il en résulte $\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{A}{C}\right)=1$, d'où, en vertu de la loi de réciprocité, $\left(\frac{BC}{A}\right)=1$, et finalement $\left(\frac{2BC}{A}\right)=-1$, égalité qui prouve que A n'est pas diviseur de t^2+2BCu^2.

Cela posé, on sait (n° **25**) que l'équation $x^2-2BCy^2=-1$ admet toujours des solutions entières. Donc (n° **22**) il en sera de même de l'équation $x^2-2BCA^2y^2=-1$.

27. Des théorèmes, qui viennent d'être démontrés, on déduit comme conséquence la proposition suivante :

Théorème. — *Si* A, B, C,..., L *représentent des nombres premiers* $8n+5$, *et si* B, C,..., L *ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* t^2-2Au^2, *les équations*

$$x^2-2A^{\alpha}B^{2\beta+1}C^{2\gamma+1}y^2=-1,$$
$$x^2-2A^{\alpha}B^{2\beta}C^{2\gamma}\ldots L^{2\lambda}y^2=-1$$

sont toujours solubles en nombres entiers.

28. En donnant à A diverses valeurs particulières, on peut déduire du théorème précédent une série de corollaires.

Corollaire I. — Si B, C,..., L *désignent des nombres premiers de l'une des formes* $40x+21$, $40x+29$, *les équations*

$$x^2-2.5^{\alpha}B^{2\beta+1}C^{2\gamma+1}y^2=-1,$$
$$x^2-2.5^{\alpha}B^{2\beta}C^{2\gamma}\ldots L^{2\lambda}y^2=-1$$

admettent toujours des solutions entières.

Corollaire II. — Si B, C,..., L *désignent des nombres premiers de l'une des formes* $104x+29$, $104x+53$, $104x+61$, $104x+69$,

$104x+77$, $104x+101$, *les équations*

$$x^2 - 2.13^\alpha B^{2\delta+1} C^{2\gamma+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2.13^\alpha B^{2\delta} C^{2\gamma} \ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours solubles en nombres entiers.

29. *Remarque.* — D'après le théorème (n° **26**), l'équation $x^2 - 2ABCy^2 = -1$, dans laquelle A, B, C représentent des nombres premiers $8n+5$, admet des solutions entières, si les deux conditions $\left(\frac{A}{B}\right) = 1$, $\left(\frac{A}{C}\right) = 1$ sont satisfaites. Or, les facteurs premiers A, B, C du déterminant peuvent être permutés dans ces égalités symboliques; nous pouvons donc généraliser la première partie du théorème n° **26** de la manière suivante :

L'équation $x^2 - 2ABCy^2 = -1$ *admet toujours des solutions entières, lorsque deux des trois quantités* $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, $\left(\frac{B}{C}\right)$ *sont égales à* $+1$.

En examinant les huit combinaisons de signe que peuvent présenter les trois quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, $\left(\frac{B}{C}\right)$, le dernier énoncé prouve que, pour quatre d'entre elles, l'équation considérée admet toujours des solutions entières. Mais la méthode ne permet aucune affirmation pour les quatre combinaisons restantes. Si deux quantités $\left(\frac{A}{C}\right)$, $\left(\frac{B}{C}\right)$ sont égales à -1, nous aurions en effet la relation

$$(\mu = 2C, AB) \qquad 2Ch^2 - ABH'^2 = \pm 1$$

qui peut admettre des valeurs entières pour h et H'.

La deuxième partie du même théorème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

L'équation $x^2 - 2BCA^2y^2 = -1$ *admet toujours des solutions entières, lorsque* $\left(\frac{B}{A}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = \pm 1$ (n^os **22** et **25**).

On voit, d'après ces deux énoncés, que si, $\left(\frac{B}{C}\right)$ étant égal à -1, on considère une équation toujours possible en nombres entiers, dont le déterminant $2BC$ soit égal au produit du facteur 2 par deux facteurs premiers $8n+5$, et que si on introduit dans ce déterminant un facteur

premier A de la même forme, la probabilité de la possibilité en valeurs entières ne sera pas la même pour les deux équations suivantes :

$$x^2 - 2BCAy^2 = -1,$$
$$x^2 - 2BCA^2y^2 = -1.$$

Pour qu'on puisse affirmer que la première équation admet forcément des valeurs entières, il faut en effet les deux conditions $\left(\frac{B}{A}\right) = 1$, $\left(\frac{C}{A}\right) = 1$, tandis que la seconde sera toujours soluble en entiers non-seulement dans le cas qui précède $\left(\frac{B}{A}\right) = 1$, $\left(\frac{C}{A}\right) = 1$, mais encore dans le cas suivant $\left(\frac{B}{A}\right) = -1$, $\left(\frac{C}{A}\right) = -1$. Pour fixer les idées, considérons les deux équations

$$(1) \qquad x^2 - 2.5.13.37y^2 = -1.$$
$$(2) \qquad x^2 - 2.5.13.37^2y^2 = -1,$$

dans lesquelles $\left(\frac{5}{13}\right) = -1$, nous avons $\left(\frac{5}{37}\right) = -1$, $\left(\frac{13}{37}\right) = -1$. Par suite, l'équation (2) admet toujours des solutions entières, tandis que nous ne pouvons rien affirmer pour l'équation (1). On reconnaîtrait d'ailleurs, par une autre voie, que cette équation (1) est impossible en valeurs entières de x et de y.

30. Avant d'examiner le cas dans lequel les facteurs premiers $8n+5$ et $8n+1$ sont mêlés dans leur combinaison avec le nombre 2, recherchons d'une manière générale les conditions de possibilité en nombres entiers d'une équation $x^2 - 2AB\ldots KLy^2 = -1$, qui contient un nombre quelconque de facteurs premiers $8n+5$ dans son déterminant.

A cet effet, considérons encore un cas particulier, *et déterminons analytiquement les conditions de possibilité en nombres entiers de l'équation*

$$x^2 - 2ABCDy^2 = -1,$$

dans laquelle A, B, C, D *représentent des nombres premiers de la forme* $8n+5$.

Nous déterminerons ces conditions en écrivant que, dans la période des dénominateurs des quotients complets provenant du développement de $\sqrt{2ABCD}$ en fraction continue, il ne peut pas y avoir de terme du milieu, terme que nous avons désigné jusqu'ici par la lettre μ.

Or, en inscrivant les quarante-huit diviseurs de $4ABCD$, on constate que, pour trente-six de ces diviseurs, les relations analogues à la suivante :

$$H^2 - 2ABCDH'^2 = \pm\mu,$$

dans lesquelles μ doit non-seulement diviser $4ABCD$, mais encore $2H$, sont naturellement impossibles en valeurs entières de H et de H'. Tous les diviseurs impairs de $2N$, qui contiendraient un nombre impair de facteurs premiers A, B, C, D, seraient de la forme $8n+5$, et seraient ainsi inadmissibles pour μ (nº **15**); le diviseur impair ABCD est supérieur à $2\sqrt{N}$, et doit être rejeté. Il ne restera donc à considérer que les six diviseurs impairs AB, AC, etc., provenant de la combinaison deux à deux des facteurs A, B, C, D, ainsi que les facteurs conjugués de ces diviseurs impairs, en tout douze diviseurs, qui pourraient correspondre à la valeur de μ, savoir :

$$(AB, 2CD), (AC, 2BD), (BC, 2AD), (AD, 2BC), (CD, 2AB), (BD, 2AC).$$

Par suite, les conditions de possibilité de l'équation considérée en nombres entiers s'obtiendront en écrivant qu'aucune des six relations suivantes ne peut admettre de solutions entières :

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(\mu = AB,\ 2CD) & ABh^2 - 2CDH'^2 = \pm 1,\\
(\mu = AC,\ 2BD) & ACh^2 - 2BDH'^2 = \pm 1,\\
(\mu = BC,\ 2AD) & BCh^2 - 2ADH'^2 = \pm 1,\\
(\mu = AD,\ 2BC) & ADh^2 - 2BCH'^2 = \pm 1,\\
(\mu = CD,\ 2AB) & CDh^2 - 2ABH'^2 = \pm 1,\\
(\mu = BD,\ 2AC) & BDh^2 - 2ACH'^2 = \pm 1.
\end{array}\right.$$

Il est facile de reconnaître que ces relations ne peuvent être vérifiées par aucune valeur entière de h ou de H', si l'on a les cinq égalités symboliques suivantes :

$$(\delta)\qquad \left(\frac{A}{C}\right) = 1,\quad \left(\frac{B}{C}\right) = 1,\quad \left(\frac{A}{D}\right) = 1,\quad \left(\frac{B}{D}\right) = 1,\quad \left(\frac{C}{D}\right) = 1.$$

Car, en examinant la première des relations (α), nous aurons, en combinant la première et la troisième des égalités (β) avec l'égalité connue $\left(\frac{2}{A}\right) = -1$, l'égalité nouvelle $\left(\frac{2CD}{A}\right) = -1$, qui prouve que A n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 \pm 2CDu^2$, ou, en d'autres termes, que la relation considérée n'admet pas de valeurs entières pour h et H'. On prouverait d'une manière analogue que l'existence des cinq égalités symboliques (β) entraîne l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' pour les autres relations (α).

Ainsi, en traduisant en langage ordinaire les conditions représentées par les égalités symboliques (β), nous aurons les conditions de possibilité en nombres entiers de l'équation considérée, dont le déterminant est 2ABCD. Remarquons à cet effet que la première et la deuxième des égalités (β) expriment que A et B ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Cu^2$, ou, en d'autres termes, qu'elles expriment (n° **26**) que l'équation $x^2 - 2ABCy^2 = -1$ admet des solutions entières. Remarquons de même que les troisième, quatrième et cinquième égalités (β) expriment que A, B et C ne sont pas compris dans les diviseurs de $t^2 - 2Du^2$.

Nous arrivons ainsi à formuler la proposition suivante :

Théorème. — *Si* A, B, C, D *représentent des nombres premiers* $8n + 5$ *l'équation*

$$x^2 - 2ABCDy^2 = -1$$

admet toujours des solutions entières, lorsque l'équation

$$x^2 - 2ABCy^2 = -1$$

est soluble en nombres entiers, et lorsque, de plus, les facteurs premiers A, B, C, *qui entrent dans le déterminant de cette dernière équation, ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - 2Du^2$.

La loi relative au cas de quatre facteurs premiers $8n + 5$, combinés avec le nombre 2, est donc analogue à celle qui a été déterminée pour le cas de trois facteurs. Hâtons-nous d'ajouter cependant que les égalités symboliques (β) ne comprennent pas tous les cas d'impossibilité en nombres entiers des relations (α), ou, en d'autres termes,

que les conditions restrictives du dernier théorème peuvent être modifiées. Mais, avant de développer cette considération, nous allons démontrer que la loi, qui vient d'être remarquée, est susceptible d'être généralisée.

31. *Recherchons à cet effet les conditions de possibilité en nombres entiers de l'équation*

$$(1) \qquad x^2 - 2AB\ldots FKLy^2 = -1,$$

dans laquelle un nombre quelconque de facteurs premiers $8n+5$ *est combiné avec* 2 *dans le déterminant.*

Commençons par déterminer d'une manière générale le nombre des équations de condition analogues aux relations (α) du numéro précédent. Comme chaque diviseur impair de $2N$ aura son conjugué dans les diviseurs pairs, le nombre de ces relations sera égal au nombre des diviseurs impairs admissibles pour μ. Or (n° **15**), les valeurs impaires à assigner à μ contiendront toujours un nombre pair de facteurs premiers de N. Par suite, dans le cas où le nombre m de facteurs premiers $8n+5$, qui entrent dans le déterminant, est pair, on pourra assigner à μ les valeurs suivantes :

1° Les diviseurs AB, AC, etc., provenant des combinaisons deux à deux des facteurs premiers du déterminant, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{2}$ valeurs.

2° Les diviseurs ABCD, ABCE, etc., provenant des combinaisons quatre à quatre des mêmes facteurs, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ valeurs.

3° Les diviseurs ABCDEF, ABCDEG, etc., provenant des combinaisons six à six des facteurs de N, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{1.2\ldots6}$ valeurs.

Et ainsi de suite jusqu'aux combinaisons $m-2$ à $m-2$ des facteurs de N, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{2}$ valeurs.

Le nombre total de ces valeurs de μ sera évidemment égal à la

somme des coefficients des termes de rang impair de la formule du binôme de Newton diminuée des coefficients du premier et du dernier terme, qui sont l'un et l'autre égaux à l'unité. Or, on sait que, dans cette formule du binôme, la somme des coefficients des termes de rang impair est égale à 2^{m-1}. Ainsi, dans le cas de m pair, le nombre des équations de condition analogues aux relations (α) sera égal à $2^{m-1}-2$. Pour $m=4$, cette formule nous donne six relations, ainsi que nous l'avons constaté dans le numéro précédent. Pour $m=2$, la même formule indique qu'il n'y a pas d'équations de condition pour la possibilité en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - 2ABy^2 = -1,$$

ou, en d'autres termes, elle confirme le théorème consistant en ce que cette équation admet toujours des solutions entières, lorsque A et B sont des nombres premiers de la forme $8n+5$.

Si le nombre m de facteurs premiers qui entrent dans le déterminant est impair, le nombre des valeurs impaires à assigner à μ s'obtiendra, comme ci-dessus, en additionnant le nombre des combinaisons deux à deux, quatre à quatre, etc., jusqu'au nombre des combinaisons $m-1$ à $m-1$ des facteurs premiers de N. Comme dans ce cas le dernier terme de la formule du binôme est de rang pair, le nombre total des valeurs impaires, qui pourront être assignées à μ, sera égal à la somme des coefficients des termes de rang impair de la formule du binôme diminuée du coefficient du premier terme, c'est-à-dire de l'unité. Pour m impair, les équations de condition seront donc au nombre de $2^{m-1}-1$. Pour $m=1$, il n'y a donc pas d'équation de condition, et l'équation

$$x^2 - 2Ay^2 = -1$$

admet toujours des solutions entières pour tout nombre A premier $8n+5$.

Après cette digression, revenons à la recherche des conditions de possibilité de l'équation (1), et remarquons que les équations de condition se ramèneront aux types suivants :

$$(\gamma)\quad\left\{\begin{array}{ll}(\mu = \text{type AB}) & ABh^2 - 2CD\ldots LH'^2 = \pm 1,\\ (\mu = \text{type ABCD}) & ABCDh^2 - 2E\ldots LH'^2 = \pm 1;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{et, enfin, pour } m \text{ pair} & \\ (\mu = \text{type } 2AB) & CD\ldots Lh^2 - 2ABH'^2 = \pm 1,\\ \text{et, dans le cas de } m \text{ impair} & \\ (\mu = \text{type } 2A) & CD\ldots Lh^2 - 2AH'^2 = \pm 1.\end{array}\right.$$

Toutes ces relations seront impossibles en valeurs entières de h et de H' si, $\left(\frac{A}{B}\right)$ restant arbitraire, nous avons les $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ égalités symboliques suivantes, que l'on obtient en combinant deux à deux les facteurs premiers $8n + 5$ qui entrent dans le déterminant, savoir :

$$(\delta)\quad\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = 1,\\ \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = 1,\\ \left(\frac{A}{E}\right) = \left(\frac{B}{E}\right) = \left(\frac{C}{E}\right) = \left(\frac{D}{E}\right) = 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{A}{L}\right) = \left(\frac{B}{L}\right) = \left(\frac{C}{L}\right) = \ldots = \left(\frac{K}{L}\right) = 1.\end{array}\right.$$

Il est clair, en effet, que si, dans l'hypothèse où nous venons de nous placer, nous considérons un type quelconque des relations (γ), le type AB par exemple, nous aurons $\left(\frac{2CD\ldots L}{B}\right) = -1$ pour toutes les combinaisons AB, et que, par cela même, les diverses égalités de ce type seront impossibles en valeurs entières de h et de H'. La même impossibilité s'établit facilement pour les relations (γ) des autres types.

Il reste à établir nettement que, dans le cas particulier où l'on s'est placé, $\left(\frac{A}{B}\right)$ peut rester arbitraire, et que les $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ égalités (δ) concourent toutes à l'impossibilité des relations (γ). En premier lieu,

A n'entrera jamais seul (n° 15) dans un coefficient impair de h^2 de ces relations; dès lors, en examinant l'une quelconque d'entre elles

$$(2)\qquad A n h'^2 - 2 p H'^2 = \pm 1,$$

et en considérant un facteur premier quelconque n_1 de n, il est évident qu'en vertu des relations (δ) nous arriverons toujours à établir l'égalité $\left(\frac{2p}{n_1}\right) = -1$, qui assure l'impossibilité de cette relation (2) en valeurs entières de h et de H', sans que nous soyons obligés d'avoir égard au signe de $\left(\frac{A}{B}\right)$. Nous arriverions à une conséquence analogue pour les relations dans lesquelles A entrerait dans un coefficient pair. Le signe de $\left(\frac{A}{B}\right)$ peut donc rester arbitraire.

En deuxième lieu, en admettant que $\left(\frac{A}{B}\right)$ soit arbitraire, c'est-à-dire égal à $+1$ ou à -1, il est facile de voir que l'une quelconque des égalités (δ), telle que $\left(\frac{D}{E}\right) = 1$, concourt à l'impossibilité des relations (γ). Il résulte en effet de ce qui précède que le diviseur AE du déterminant sera l'une des valeurs susceptibles d'être assignées à μ, les relations (γ) comprendront donc la suivante

$$AEh^2 - 2BCD\ldots KLH'^2 = \pm 1.$$

Or, l'impossibilité de cette relation en valeurs entières de h et de H' se prouve par l'égalité $\left(\frac{2BCD\ldots KL}{E}\right) = -1$, à l'établissement de laquelle concourt l'égalité considérée $\left(\frac{D}{E}\right) = 1$.

Ainsi, en résumé, sans affirmer que l'équation

$$x^2 - 2ABCD\ldots FKLy^2 = -1$$

ne soit possible en nombres entiers que dans le cas où les égalités (δ) sont remplies, il est certain que si ces $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ égalités sont satisfaites, l'équation considérée admettra des solutions entières.

Pour formuler une loi de possibilité, il suffira de traduire en langage ordinaire les égalités (δ). Or, les deux premières expriment que A et B ne sont pas compris dans les diviseurs de $t^2 - 2Cu^2$, les trois suivantes signifient que A, B et C ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Du^2$, et ainsi de suite, suivant une loi évidente jusqu'aux égalités de la dernière ligne qui expriment que les $m - 1$ facteurs premiers A, B, C,..., F, K ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Lu^2$. Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *L'équation* $x^2 - 2ABC...FKLy^2 = -1$, *dans laquelle* A, B, C,..., L *représentent des nombres premiers* $8n+5$, *admet toujours des solutions entières, lorsque l'équation* $x^2 - 2ABC...FKy^2 = -1$ *a des solutions de même nature, et lorsque de plus les facteurs* A, B, C,..., K, *qui entrent dans le déterminant de cette dernière équation, ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - 2Lu^2$.

52. Dans l'énoncé précédent, on a traduit en langage ordinaire les conditions qui dérivent des égalités symboliques (δ); par cela même, la condition relative à la possibilité en nombres entiers de l'équation $x^2 - 2ABC...FKy^2 = -1$ doit être entendue dans ce sens que l'équation $x^2 - 2ABC...Fy^2 = -1$ admet à son tour des solutions entières, et que de plus A, B, C,..., F ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - Ku^2$, et ainsi de suite, en passant par une série d'équations dans lesquelles le nombre des facteurs premiers du déterminant diminue successivement d'une unité jusqu'à ce qu'on arrive à l'équation $x^2 - 2ABy^2 = -1$, qui admet toujours des solutions entières aussi bien dans le cas de $\left(\frac{A}{B}\right) = 1$ que dans le cas contraire $\left(\frac{A}{B}\right) = -1$.

En donnant cette interprétation à l'énoncé du théorème du n° **51**, il est évident que les équations qui auraient pour déterminant le facteur 2 multiplié par une combinaison quelconque n à n des facteurs premiers $8n+5$, qui entrent dans le déterminant de l'équation primitive, seraient aussi toujours possibles en nombres entiers.

Ainsi, pour fixer les idées, considérons l'équation

$$x^2 - 2.29.61.5.109y^2 = -1;$$

nous pouvons affirmer (nº **31**) qu'elle admet des solutions entières, puisque nous avons les $\frac{m(m-1)}{2} - 1 = 5$ égalités symboliques suivantes :

$$\left(\frac{29}{5}\right) = \left(\frac{61}{5}\right) = 1, \quad \left(\frac{29}{109}\right) = \left(\frac{61}{109}\right) = \left(\frac{5}{109}\right) = 1,$$

et nous pouvons affirmer de plus que des nombres entiers peuvent également vérifier les équations qui auraient pour déterminant les nombres qu'on obtiendrait en multipliant 2 par les combinaisons trois à trois des facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans l'équation primitive, savoir :

$$2.\ 5.29.\ 61 = 17690,$$
$$2.\ 5.29.109 = 31610,$$
$$2.\ 5.61.109 = 66490,$$
$$2.29.61.109 = 385642.$$

Dans l'équation dont le déterminant serait 17690, nous aurions en effet $\left(\frac{2.5}{29}\right) = -1$, $\left(\frac{2.5}{61}\right) = -1$, conditions qui suffisent (nº **26**) pour assurer la possibilité de cette équation en valeurs entières. On reconnaîtrait de la même manière que les trois équations suivantes sont dans le même cas.

33. Nous avons dit ci-dessus, à la suite de l'énoncé du théorème du nº **30**, que tous les cas de possibilité de l'équation $x^2 - 2\text{ABCD}y^2 = -1$ en nombres entiers n'étaient pas compris dans ce théorème; pour légitimer cette assertion, supposons que les égalités symboliques ($\mathfrak{S}$), inscrites au numéro précité, soient remplacées par les égalités suivantes :

$$(\mathfrak{S}') \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1, \quad \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = -1.$$

En suivant la marche habituelle, on reconnaîtra sans difficulté que

si ces cinq conditions ($\mathfrak{S}'$) sont remplies, les équations de condition (α), inscrites (n° **50**), sont impossibles en valeurs entières de h et de H', ou, en d'autres termes, que, dans cette hypothèse, l'équation

$$x^2 - 2\,\mathrm{ABCD}\,y^2 = -1$$

admet des solutions entières.

En traduisant en langage ordinaire les conditions ($\mathfrak{S}'$), nous aurons la proposition suivante :

THÉORÈME. — *L'équation* $x^2 - 2\,\mathrm{ABCD}\,y^2 = -1$, *dans laquelle* A, B, C, D *représentent des nombres premiers* $8n + 5$, *est toujours possible en nombres entiers, si* A *et* B *ne sont pas compris dans les diviseurs de* $t^2 - \mathrm{C}u^2$, *et si de plus* A, B, C *ne sont pas compris dans les diviseurs de* $t^2 - \mathrm{D}u^2$.

54. Il est facile de constater que le théorème précédent, dans lequel la loi relative aux conditions de possibilité apparaît clairement, peut être étendu à un nombre pair quelconque de facteurs premiers $8n + 5$ combinés avec 2. Dans ce cas, en effet, les valeurs, qu'on pourra assigner au nombre que nous avons désigné par μ, contiendront toujours un nombre pair des facteurs premiers $8n + 5$, aussi bien pour les valeurs impaires de μ que pour les valeurs conjuguées de ces dernières. Dès lors les équations de condition (γ) du n° **51** seront impossibles en valeurs entières de h et de H' non-seulement dans le cas où les égalités symboliques (δ) seraient satisfaites, mais encore dans le cas où l'on changerait le signe du deuxième membre de ces égalités, ce qui donnerait les $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ conditions :

$$(\delta')\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right) = -1, \\ \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\right) = -1, \\ \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}\right) = -1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{L}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{L}}\right) = \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}\right) = \ldots = \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right) = -1. \end{array}\right.$$

Nous aurons ainsi la proposition suivante :

THÉORÈME. — *L'équation* $x^2 - 2\mathrm{ABCD}\ldots\mathrm{FKL}y^2 = -1$, *dont le déterminant contient un nombre pair de facteurs premiers* A, B,..., K, L, *de la forme* $8n+5$, *est toujours possible en nombres entiers, lorsque les conditions suivantes sont remplies :*

1° *Si* A et B *ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - \mathrm{C}u^2$;

2° *Si* A, B *et* C *ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - \mathrm{D}u^2$;

. . . .

$(m-2)°$ *Si* A, B, C,..., F, K *ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de* $t^2 - \mathrm{L}u^2$.

Il est facile de voir qu'il ne serait plus exact de dire, dans le cas du théorème qui vient d'être énoncé, que les équations, qui auraient pour déterminant le nombre 2 multiplié par une combinaison quelconque n à n des nombres premiers $8n+5$ qui entrent dans l'équation primitive, seraient toujours possibles en nombres entiers. Cette proposition ne serait vraie que dans le cas de n pair. Pour fixer les idées, considérons l'équation

$$x^2 - 2.5.109.13.37y^2 = -1,$$

nous aurons les cinq égalités symboliques

$$\left(\frac{5}{13}\right) = \left(\frac{109}{13}\right) = -1, \quad \left(\frac{5}{37}\right) = \left(\frac{109}{37}\right) = \left(\frac{13}{37}\right) = -1,$$

qui permettent d'affirmer que cette équation admet toujours des solutions entières; si nous multiplions ensuite le facteur 2 successivement par les quatre combinaisons trois à trois des facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans la même équation, les conditions déterminées (n° **29**) ne seraient pas remplies pour les équations dont les déterminants seraient égaux aux nombres :

$$2.5.13.37, \quad 2.5.13.109, \quad 2.5.37.109, \quad 2.13.37.109.$$

Nous ne pourrions donc pas affirmer que ces équations admettraient des solutions entières; on peut constater d'ailleurs par une autre voie qu'aucune d'elles n'est soluble en nombres entiers. On reconnaît, par exemple, que la décomposition du déterminant 2.5.13.37 en deux carrés ne peut s'effectuer que des quatre manières suivantes :

$$2.5.13.37 = 69^2 + 7^2 = 63^2 + 29^2 = 51^2 + 47^2 = 33^2 + 61^2,$$

et l'examen de ces carrés composants suffit (nos **8**, **15**, **16**) pour permettre d'affirmer que l'équation correspondante serait impossible en valeurs entières.

55. On ne peut pas dire que les théorèmes énoncés (nos **51** et **54**) comprennent tous les cas de possibilité en valeurs entières des équations auxquelles ils se rapportent. On a seulement démontré en effet que, si les égalités symboliques (δ) ou (δ') étaient satisfaites, les équations de condition (γ) ne pouvaient pas être vérifiées par des valeurs entières de h ou de H'. Mais la réciproque de cette proposition n'est nullement exacte. Pour compléter ce qui se rattache aux équations qui ne contiennent que des facteurs premiers $8n + 5$ combinés avec le nombre 2 dans le déterminant, nous serions donc conduits à rechercher tous les cas pour lesquels on peut affirmer, d'après les principes qui précèdent, que ces équations admettent forcément des valeurs entières.

Pour effectuer cette recherche, on ne saurait songer, pour une équation qui contiendrait m facteurs premiers $8n + 5$ dans son déterminant, à faire toutes les combinaisons possibles des signes des $\frac{m(m-1)}{2}$ quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, etc., et à examiner ensuite si, pour chaque série (δ) d'égalités symboliques, les équations de condition (γ) admettraient ou n'admettraient pas de valeurs entières pour h et H'. Le nombre de séries d'égalités symboliques serait en effet égal à $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$, ou $2^{\frac{m(m-1)}{2}-1}$, en ne fixant pas, comme il est souvent possible de le faire, le signe de l'une des quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$. Ce procédé serait imprati-

cable dès que m serait un peu grand. Il est donc indispensable de recourir à une autre marche; par analogie avec ce qui précède, nous allons essayer de rattacher une équation, qui contient un certain nombre de facteurs premiers dans son déterminant, à une équation pour laquelle les équations de condition (α) seront supposées impossibles en valeurs entières de h et de H', et qui contiendra un ou deux facteurs premiers de moins dans son déterminant. Commençons cette recherche par les équations qui renferment un nombre pair de facteurs premiers $8n+5$, et établissons à ce sujet les théorèmes suivants.

56. Théorème. — *Si l'équation*

$$(1) \qquad x^2 - 2ABCD\ldots KLy^2 = -1,$$

dans laquelle les facteurs A, B, C,..., K, L *de la forme* $8n+5$ *sont en nombre pair, admet des solutions entières, il en sera de même de l'équation*

$$(2) \qquad x^2 - 2ABCD\ldots KLPQy^2 = -1,$$

dans le cas où les facteurs premiers P *et* Q *de la forme* $8n+5$ *satisfont aux conditions suivantes :*

$$(a) \quad \begin{cases} \left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{B}{P}\right) = \left(\frac{C}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{P}\right) \\ \qquad = \left(\frac{A}{Q}\right) = \left(\frac{B}{Q}\right) = \left(\frac{C}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{Q}\right) = \pm 1. \end{cases}$$

Considérons les équations de condition (α) relatives à ces deux équations, savoir :

Pour l'équation (1),

$$(\alpha_1) \quad \begin{cases} (\mu = \text{type } AB) & ABh^2 - 2C\ldots KLH'^2 = \pm 1, \\ (\mu = \text{type } ABCD) & ABCDh^2 - 2C\ldots KLH'^2 = \pm 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\mu = \text{type } 2AB) & CD\ldots KLh^2 - 2ABH'^2 = \pm 1; \end{cases}$$

Pour l'équation (2),

$$(\alpha_2)\quad \left\{\begin{array}{ll} (\mu = \text{type AB}) & ABh^2 - 2C\ldots KLPQH'^2 = \pm 1, \\ (\mu = \text{type ABCD}) & ABCDh^2 - 2C\ldots KLPQH'^2 = \pm 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mu = \text{type 2AB}) & CD\ldots PQh^2 - 2ABH'^2 = \pm 1. \end{array}\right.$$

Par hypothèse, les relations (α_1) relatives à l'équation (1) ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H', et il faut démontrer que, les autres conditions de l'énoncé étant remplies, les relations (α_2) n'admettront pas non plus de valeurs entières pour les mêmes quantités.

Ces dernières relations se divisent en trois séries :

1° Celles qui ne contiennent ni P ni Q au coefficient de h^2, relations qui reproduiront exactement les égalités (α_1) relatives à l'équation (1), avec cette seule différence que le produit PQ sera introduit au coefficient de H'^2. Toutefois, dans ces relations qui ne contiennent ni P ni Q au coefficient de h'^2, on trouve encore la suivante, unique de son espèce :

$$(3_2)\qquad ABC\ldots KLh^2 - 2PQH'^2 = \pm 1.$$

2° Celles qui contiennent soit P soit Q au coefficient de h^2.

3° Celles qui contiennent à la fois P et Q audit coefficient de h^2, et qui sont analogues aux relations de la première série, puisqu'elles n'en diffèrent que par le déplacement du produit PQ d'un coefficient à l'autre.

Prouvons d'abord que les relations de la première série ne peuvent pas admettre de valeurs entières de h et de H'. En considérant l'une quelconque de ces relations :

$$(4_2)\qquad AB\ldots EFh^2 - 2C\ldots KLPQH'^2 = \pm 1,$$

et en la rapprochant de la relation

$$(4_1)\qquad AB\ldots EFh^2 - 2C\ldots KLH'^2 = \pm 1,$$

qui lui correspond dans les égalités (α_1), nous observerons que, d'après l'énoncé, cette relation (4_1) ne peut pas admettre de valeurs entières

pour h et H'; par suite, en désignant par M un facteur particulier du coefficient de H'^2 de cette dernière relation, et par N un coefficient particulier de h^2, nous avons l'une ou l'autre des deux égalités

$$\left(\frac{AB\ldots EF}{M}\right) = -1, \quad \left(\frac{2C\ldots KL}{N}\right) = -1.$$

Dans le premier cas, la relation (4_2) ne peut pas admettre de valeurs entières pour h et H'; dans le deuxième cas, nous remarquerons que, d'après les conditions (a) de l'énoncé, $\left(\frac{PQ}{N}\right) = 1$, d'où il résultera $\left(\frac{2C\ldots KLPQ}{N}\right) = -1$. La relation (4_2) est donc toujours impossible en valeurs entières de h et de H'.

La relation (3_2), qui se rattache à la même série, est aussi dans ce cas; nous aurons en effet, d'après l'énoncé, $\left(\frac{2PQ}{A}\right) = -1$.

Passons aux relations de la deuxième série, et considérons l'une quelconque d'entre elles :

$$(5_2) \qquad AB\ldots EFPh^2 - 2BC\ldots KLQH'^2 = \pm 1.$$

Les facteurs premiers autres que P et Q, qui entrent dans les coefficients de h^2 et de H'^2 de cette dernière relation, sont en nombre impair (n° **31**). Nous avons donc, d'après les conditions (a) :

$$\left(\frac{AB\ldots EF}{Q}\right) = \left(\frac{A}{Q}\right), \quad \left(\frac{2BC\ldots KL}{P}\right) = -\left(\frac{B}{P}\right) = -\left(\frac{A}{Q}\right),$$

d'où il résulte

$$\left(\frac{AB\ldots EFP}{Q}\right) = \left(\frac{AP}{Q}\right), \quad \left(\frac{2BC\ldots KLQ}{P}\right) = -\left(\frac{AP}{Q}\right).$$

Or, comme $\left(\frac{AP}{Q}\right) = \pm 1$, ces dernières inégalités prouvent que la relation (5_2) est impossible en valeurs entières de h et de H'.

Considérons enfin les relations de la troisième série, qui rentrent dans le type suivant :

$$(6_2) \qquad AB\ldots PQh^2 - 2CD\ldots KLH'^2 = \pm 1.$$

Les facteurs C, D,..., K, L du coefficient de H'^2 sont évidemment en nombre pair, nous avons donc, en vertu des conditions (a),

$$\left(\frac{CD...KL}{P}\right) = 1, \quad \text{et par suite,} \quad \left(\frac{2CD...KL}{P}\right) = -1,$$

ce qui prouve que la relation (6_2) ne peut pas admettre de valeurs entières de h et de H'. Le théorème est donc démontré.

Pour démontrer que les relations de la première série sont impossibles en valeurs entières de h et de H', nous nous sommes reportés aux relations correspondantes de l'équation (1) dont le déterminant contient deux facteurs premiers de moins. On pourrait se demander, par suite, si le théorème est applicable au cas de l'équation $x^2 - 2ABPQy^2 = -1$, pour lequel les relations (α_1) relatives à l'équation $x^2 - 2ABy^2 = -1$ n'existent pas. Mais, sans entrer dans les détails de la question, il est facile de voir, en appliquant la marche suivie dans la démonstration précédente, que le théorème est aussi vrai dans ce cas particulier.

37. Réciproquement, on peut démontrer que si les conditions

$$(a) \qquad \left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{B}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{P}\right) = \left(\frac{A}{Q}\right) = \left(\frac{B}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{Q}\right) = \pm 1$$

sont satisfaites, ce n'est qu'en réunissant ces conditions à un groupe d'égalités en vertu desquelles l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2AB...KLy^2 = -1$$

admettrait des valeurs entières, qu'on pourra établir que l'équation $x^2 - 2AB...KLPQy^2 = -1$ admet aussi des valeurs entières.

Reprenons la relation de la première série, considérée dans le numéro précédent, et rapprochons-la de celle qui lui correspond dans les relations (α_1) relatives à l'équation (1). Ces relations, déjà inscrites ci-dessus, sont :

$$(4_2) \qquad AB...EFh^2 - 2C...KLPQH'^2 = \pm 1,$$

$$(4_1) \qquad AB...EFh^2 - 2C...KLH'^2 = \pm 1.$$

Si les égalités qu'on doit grouper avec les conditions (a) n'expriment

pas que l'équation (1) admet des valeurs entières, nous ne pourrons pas établir, au moyen de ces égalités, que l'une des quantités

$$\left(\frac{AB\ldots EF}{M}\right), \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2C\ldots KL}{N}\right),$$

dans lesquelles M et N désignent comme ci-dessus un facteur premier quelconque des coefficients de H'^2 et de h^2 de la relation (4_1), est égale à -1. Mais comme, en vertu des conditions, $(a)\left(\frac{PQ}{N}\right) = 1$, il sera, par suite, également impossible d'établir que la relation (4_2) n'admet pas de valeurs entières pour h et H'. La réciproque est donc démontrée.

58. Théorème. — *Si l'équation*

$$(1) \qquad x^2 - 2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1y^2 = -1,$$

dans laquelle les facteurs premiers $8n+5$ *sont en nombre pair dans chacune des deux séries* A, B,..., K, L *et* A_1, B_1,..., K_1, L_1, *admet des solutions entières, il en sera de même de l'équation*

$$(2) \qquad x^2 - 2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1PQy^2 = -1,$$

dans le cas où les facteurs premiers P *et* Q *de la forme* $8n+5$ *satisfont aux conditions suivantes :*

$$(a)\ \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{B}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{P}\right) = \left(\frac{A}{Q}\right) = \left(\frac{B}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{Q}\right) = \pm 1, \\ &\left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{B_1}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{L_1}{P}\right) = \left(\frac{A_1}{Q}\right) = \left(\frac{B_1}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{L_1}{Q}\right) = \mp 1. \end{aligned}\right.$$

Imaginons que l'on ait écrit, comme dans le théorème précédent, les équations de condition (α_1) et (α_2) relatives aux équations (1) et (2). Nous supposons, d'après l'énoncé, que les facteurs premiers, qui entrent dans le déterminant de l'équation (1), sont tels que les relations (α_1) ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H', et il faut démontrer que, si les conditions (a) sont satisfaites, il en sera de même pour les relations (α_2).

Ces dernières relations étant divisées en trois séries analogues à celles que nous avons définies dans le théorème précédent, les relations de chaque série se ramènent aux types suivants :

$$
1^{\text{re}}\text{ série}\begin{cases} AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1h^2 - 2CD\ldots C_1D_1\ldots L_1PQH'^2 = \pm 1 & (3_2),\\ AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1h^2 - 2PQH'^2 = \pm 1 & (4_2),\end{cases}
$$

$$
2^{\text{e}}\text{ série}\begin{cases} AB\ldots LA_1B_1\ldots K_1Ph^2 - 2CD\ldots KC_1D_1\ldots L_1QH'^2 = \pm 1 & (5_2),\\ AB\ldots LA_1B_1\ldots K_1Qh^2 - 2CD\ldots KC_1D_1\ldots L_1PH'^2 = \pm 1 & (6_2),\end{cases}
$$

$$
3^{\text{e}}\text{ série}\begin{cases} AB\ldots LA_1B_1\ldots K_1PQh^2 - 2CD\ldots KC_1D_1'\ldots L_1H'^2 = \pm 1 & (7_2),\\ PQh^2 - 2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1H'^2 = \pm 1 & (8_2).\end{cases}
$$

Établissons d'abord que les relations de la première série ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H'. D'après les conditions (a), nous avons pour tout facteur premier N qui entre dans le déterminant de l'équation (1) $\left(\frac{PQ}{N}\right) = 1$, et partant $\left(\frac{2PQ}{N}\right) = -1$, ce qui prouve que la relation (4_2) est impossible en valeurs entières de h et de H'. Il en est de même de la relation (3_2); car, en rapprochant l'une quelconque des relations de ce type (3_2) de celle qui lui correspond dans les relations (α_1) ou (3_1), nous aurons, en conservant à M et à N la signification définie au théorème précédent, l'une des égalités suivantes :

$$
\left(\frac{AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1}{M}\right) = -1,\quad \left(\frac{2CD\ldots C_1D_1L_1}{N}\right) = -1.
$$

Ainsi, comme nous venons de voir que $\left(\frac{PQ}{N}\right) = 1$, il en résulte que l'ensemble des relations (3_2) est impossible en valeurs entières de h et de H'.

Considérons maintenant les relations de la deuxième série; dans le type (5_2), les facteurs A, B,..., L, qui entrent dans le coefficient de h^2, seront en nombre pair ou impair, mais, quel que soit le cas qui se présente, le nombre des facteurs C, D,..., K, qui entrent dans le coefficient de H'^2, sera de même parité; de même, les chiffres qui représentent le nombre de facteurs A_1, B_1,..., K_1 qui entrent dans le coefficient de h^2 d'une part, et le nombre de facteurs C_1, D_1,..., L_1 qui entrent dans

le coefficient de H'^2 d'autre part, seront tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Nous aurons donc, en vertu des conditions (a), les deux égalités,

$$\left(\frac{AB\ldots L}{Q}\right) = \left(\frac{CD\ldots K}{P}\right), \quad \left(\frac{A_1B_1\ldots K_1}{Q}\right) = \left(\frac{C_1D_1\ldots L_1}{P}\right);$$

en rapprochant ces deux égalités de la suivante $\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right)$ et multipliant membre à membre les trois égalités, nous aurons finalement

$$\left(\frac{AB\ldots LA_1B_1\ldots K_1P}{Q}\right) = \left(\frac{CD\ldots KC_1D_1\ldots L_1Q}{P}\right),$$

ce qui prouve, en tenant compte de l'égalité $\left(\frac{2}{P}\right) = -1$, que l'une quelconque des relations représentées par le type (5_2) est impossible en valeurs entières de h et de H'. La même démonstration est applicable aux relations (6_2), et elle s'appliquerait aussi, avec une légère modification, au cas où l'un des coefficients de h^2 ou de H'^2 ne contiendrait pas de facteurs premiers de l'une des séries A, B,..., L ou $A_1, B_1, \ldots, L_1$.

Examinons enfin les relations de la troisième série, et commençons par la relation (8_2), qui est unique de son espèce. Les facteurs premiers A, B,..., K, L entrent en nombre pair dans le coefficient de H'^2, et les facteurs $A_1, B_1, \ldots, K_1, L_1$ sont dans le même cas; nous avons donc, en vertu des conditions (a),

$$\left(\frac{AB\ldots KL}{P}\right) = 1, \quad \left(\frac{A_1B_1\ldots K_1L_1}{P}\right) = 1,$$

ce qui nous donne l'égalité $\left(\frac{2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1}{P}\right) = -1$, qui prouve que la relation (8_2) est impossible en valeurs entières de h et de H'.

En ce qui concerne les relations de cette troisième série dont le type est représenté par l'égalité (7_2) inscrite ci-dessus, considérons le type (7_1) qui lui correspond dans les relations (α_1)

$$(7_1) \qquad AB\ldots LA_1B_1\ldots K_1h^2 - 2CD\ldots KC_1D_1 - L_1H'^2 = \pm 1$$

et observons que, puisque l'équation (1) est soluble en nombres entiers,

cette relation (7_1) n'admet pas de valeurs entières pour h et H'. Nous avons donc l'une des égalités suivantes :

$$\left(\frac{AB\ldots LA_1B_1\ldots K_1}{M}\right) = -1, \quad \left(\frac{2CD\ldots KC_1D_1\ldots L_1}{N}\right) = -1;$$

mais, en vertu des conditions (a), $\left(\frac{PQ}{M}\right) = 1$. Les relations de la troisième série dont le type est représenté par l'égalité (7_2) sont donc impossibles en valeurs entières de h et H', ce qui démontre le théorème.

59. *Remarque.* — Dans le cas où les signes des seconds membres des conditions (a) sont différents, il est essentiel que les facteurs premiers $A, B, \ldots, K, L$ et $A_1, B_1, K_1, \ldots, L_1$ soient en nombre pair dans chacune des séries. Dans la démonstration on s'est en effet appuyé sur cette condition; mais, pour ne laisser aucun doute à cet égard, partons de l'équation

$$x^2 - 2AA_1y^2 = -1, \tag{1}$$

et essayons d'établir la possibilité de l'équation

$$x^2 - 2AA_1PQy^2 = -1 \tag{2}$$

dans le cas suivant :

$$\left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{A}{Q}\right) = 1, \quad \left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{A_1}{Q}\right) = -1; \tag{a}$$

parmi les six équations de condition (α_2) relatives à l'équation (2), nous trouverons la suivante :

$$PQh^2 - 2AA_1H'^2 = \pm 1.$$

Or, d'après les conditions (a), $\left(\frac{PQ}{A}\right) = 1$, $\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = 1$, $\left(\frac{2AA_1}{P}\right) = 1$, $\left(\frac{2AA_1}{Q}\right) = 1$, il serait donc impossible d'établir que la relation, qui vient d'être inscrite, n'admet pas de valeurs entières pour h et H', et par

suite de prouver que l'équation (2) admet toujours des valeurs entières pour x et y. On arriverait à la même conséquence dans le cas où les conditions (a) seraient remplacées par les suivantes :

$$(a_1) \qquad \left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{A}{Q}\right) = -1, \quad \left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{A_1}{Q}\right) = 1.$$

Ainsi, on ne peut rien conclure sur la possibilité en valeurs entières de l'équation $x^2 - 2AA_1 PQy^2 = -1$, dans le cas où les conditions (a) ou (a_1) sont remplies. Mais il est facile de voir que cette conséquence a une portée plus générale. Entrons dans quelques détails.

40. Lorsque les conditions (a), inscrites dans les énoncés des théorèmes (nos **36** et **38**), sont satisfaites, ces théorèmes permettent de rattacher les conditions de possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1 PQy^2 = -1$$

a celles de l'équation analogue (1), qui ne contient pas le produit PQ dans son déterminant.

En examinant dans les énoncés de ces théorèmes les conditions (a), on constate qu'elles rentrent dans les suivantes :

$$\left(\frac{PQ}{A}\right) = \left(\frac{PQ}{B}\right) = \ldots = \left(\frac{PQ}{L}\right) = \left(\frac{PQ}{A_1}\right) = \left(\frac{PQ}{B_1}\right) = \ldots = \left(\frac{PQ}{L_1}\right) = 1,$$

les quantités $\left(\frac{P}{A}\right)$, $\left(\frac{Q}{A}\right)$, $\left(\frac{P}{B}\right)$, $\left(\frac{Q}{B}\right)$, ..., étant toutes égales à $+1$ ou à -1 dans le théorème (n° **36**), tandis que dans le théorème (n° **38**), lorsque le signe des seconds membres des égalités (a) n'est pas le même, c'est-à-dire pour le cas où ce théorème diffère en réalité du théorème (n° **36**), les quantités $\left(\frac{P}{A}\right)$ et $\left(\frac{Q}{A}\right)$, relatives à un facteur premier quelconque du déterminant de l'équation (1), sont bien toujours de même signe, mais ce signe commun n'est plus le même que le signe des quantités $\left(\frac{P}{A_1}\right)$ et $\left(\frac{Q}{A_1}\right)$.

Cela posé, lorsque les deux séries A, B,..., L et A_1, B_1,..., L_1, considérées dans le théorème (n° **38**), contiennent chacune un nombre pair

de termes, conformément à la condition posée dans l'énoncé, on prouverait, en suivant la marche indiquée (n° 37), que réciproquement ce ne serait qu'en réunissant les conditions (a) à un groupe d'égalités (δ_1), en vertu duquel l'équation (1) serait possible en valeurs entières, qu'on pourrait établir que l'équation (2) admettrait aussi des solutions de même nature. Pour la recherche indiquée (n° 35), il suffira donc, relativement à l'équation (2), dans le cas où les égalités (a) seraient remplies, de grouper ces égalités (a) des théorèmes (n°s 36 et 38) avec les égalités qui expriment la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières, sans s'inquiéter des autres permutations de signes qu'on pourrait faire subir aux quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,..., provenant des combinaisons deux à deux des facteurs premiers qui entrent dans le déterminant de l'équation (1).

De plus, et c'est là l'extension de la conséquence constatée à la fin de la remarque précédente, si les deux séries A, B,..., L et A_1, B_1,..., L_1 renferment chacune un nombre impair de termes, contrairement à ce qu'on a supposé (n° 38), et si les conditions

$$(a)\quad\begin{cases}\left(\frac{A}{P}\right)=\left(\frac{B}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{L}{P}\right)=\left(\frac{A}{Q}\right)=\left(\frac{B}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{L}{Q}\right)=+1 \text{ ou } -1\\ \left(\frac{A_1}{P}\right)=\left(\frac{B_1}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{L_1}{P}\right)=\left(\frac{A}{Q}\right)=\left(\frac{B}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{L}{Q}\right)=-1 \text{ ou } +1\end{cases}$$

sont remplies, on peut démontrer qu'il ne sera pas possible de rien affirmer sur la possibilité de l'équation (2) en valeurs entières, soit que l'équation (1) admette des solutions de même nature, soit qu'elle n'en admette pas.

Parmi les équations de condition (α_2), relatives à l'équation (2), nous aurons, en effet, la suivante :

$$(r)\qquad PQh^2 - 2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1H'^2 = \pm 1;$$

pour un facteur quelconque M du coefficient de H'^2, nous aurions $\left(\frac{PQ}{M}\right)=1$, en vertu des conditions (a). En outre, comme les facteurs premiers des deux séries, A, B,..., L et A_1, B_1,..., L_1 sont en nombre

impair dans chacune d'elles, nous avons, d'après les conditions (a),

$$\left(\frac{AB\ldots KL}{P}\right) = \left(\frac{A}{P}\right), \quad \left(\frac{A_1B_1\ldots K_1L_1}{P}\right) = \left(\frac{A_1}{P}\right);$$

par suite,

$$\left(\frac{AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1}{P}\right) = \left(\frac{AA_1}{P}\right) = -1,$$

ce qui prouve, eu égard à la symétrie qui existe entre P et Q, que la relation (r) peut admettre des valeurs entières pour h et H', ou, en d'autres termes, qu'on ne peut pas affirmer que l'équation (2) admet, dans ce cas, des solutions entières.

Sans entrer dans d'autres détails, nous arrivons ainsi à la conséquence suivante : Lorsque pour une équation (1), qui contient un nombre pair de facteurs premiers $8n+5$ combinés avec le nombre 2 dans son déterminant, on a obtenu toutes les séries d'égalités symboliques (δ_1) pour lesquelles on peut affirmer que l'équation considérée admet des solutions entières, les considérations précédentes permettent d'établir sans tâtonnement toutes les séries d'égalités symboliques (δ_2) pour lesquelles on peut affirmer que l'équation (2), qui contient deux facteurs premiers de plus de la forme $8n+5$ dans son déterminant, admet aussi des valeurs entières pour le cas où les conditions suivantes, relatives aux deux nouveaux facteurs P et Q, sont remplies, savoir :

$$\left(\frac{PQ}{A}\right) = \left(\frac{PQ}{B}\right) = \ldots = \left(\frac{PQ}{L}\right) = \left(\frac{PQ}{A_1}\right) = \left(\frac{PQ}{B_1}\right) = \ldots = \left(\frac{PQ}{L_1}\right) = 1.$$

11. En conservant les notations précédentes, recherchons les conséquences auxquelles on peut arriver lorsque les quantités $\left(\frac{PQ}{A}\right)$, $\left(\frac{PQ}{B}\right)$, etc. sont toutes négatives, et supposons d'abord que les facteurs premiers, qui entrent dans le déterminant de l'équation (1), se partagent en deux séries $A, B, \ldots, K, L$ et $A_1, B_1, \ldots, K_1, L_1$ composées chacune d'un nombre pair de termes, et pour lesquelles on aurait les

conditions

$$(a)\quad \begin{cases} \left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{B}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{P}\right) = \left(\frac{A_1}{Q}\right) = \left(\frac{B_1}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{L_1}{Q}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{A}{Q}\right) = \left(\frac{B}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{Q}\right) = \left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{B_1}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{L_1}{P}\right) = \mp 1; \end{cases}$$

dans ces égalités, les signes supérieurs des seconds membres marchent ensemble, ainsi que les signes inférieurs, à cause des conditions $\left(\frac{PQ}{A}\right) = -1$, $\left(\frac{PQ}{B}\right) = -1$, etc.

Cela posé, dans les relations (α_2), relatives à l'équation

$$(2)\qquad x^2 - 2AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1y^2 = -1,$$

nous trouverions la suivante :

$$(r)\qquad AB\ldots KLA_1B_1\ldots K_1L_1h^2 - 2PQH'^2 = \pm 1.$$

Or, pour un facteur quelconque M qui entre dans le coefficient de h^2, nous aurons l'égalité $\left(\frac{2PQ}{M}\right) = 1$. De plus, comme les facteurs de chacune des séries $A, B, \ldots, K, L$ et $A_1, B_1, \ldots, K_1, L_1$ entrent par hypothèse en nombre pair dans le déterminant de l'équation (1) à laquelle nous rattachons l'équation (2), nous aurons

$$\left(\frac{AB\ldots KLA_1B_1 - K_1L_1}{P}\right) = \left(\frac{AB\ldots KLA_1B_1 - K_1L_1}{Q}\right) = 1;$$

la relation (r) peut donc admettre des valeurs entières pour h et H'. Ainsi, dans les conditions où l'on s'est placé, on ne peut pas se prononcer sur la possibilité de l'équation (2) en valeurs entières de x et de y. Pour fixer les idées, partons de l'équation $x^2 - 2ABy^2 = -1$, et supposons que les facteurs premiers P et Q de la forme $8n + 5$, comme cela a lieu pour les nombres premiers A et B, satisfassent aux conditions suivantes :

$$(a_1)\qquad \left(\frac{A}{P}\right) = \left(\frac{B}{P}\right) = 1,\quad \left(\frac{A}{Q}\right) = \left(\frac{B}{Q}\right) = -1;$$

on ne pourrait pas se prononcer sur la possibilité en valeurs entieres de x et de y pour l'équation $x^2 - 2\text{ABPQ}\,y^2 = -1$, et cette conséquence est indépendante de la nature des signes des expressions $\left(\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)$ et $\left(\frac{\text{C}}{\text{D}}\right)$. On arriverait aussi à la même conséquence, en permutant les signes des seconds membres des égalités (a_1).

(La suite prochainement.)

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+20B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2+20B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent d'une propriété commune, à savoir que pour chacun d'eux on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m=10x^2+p^{4l+1}y^2,$$

x, y désignant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m, contenu dans la formule

$$A^2+20B^2,$$

en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$10.1^2,\quad 10.3^2,\quad 10.5^2,\quad 10.7^2,\quad 10.9^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$10,\quad 90,\quad 250,\quad 490,\quad 810,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p. Mais comme on a

$$m \equiv 5 \pmod{8}$$

et qu'en outre m est résidu quadratique de 5, l'équation

$$m = 10x^2 + p^{4l+1}y^2$$

ne pourra avoir lieu qu'autant que p sera aussi résidu quadratique de 5 et vérifiera la congruence

$$p \equiv 3 \pmod{8}.$$

Ainsi p sera nécessairement de l'une des deux formes linéaires

$$40g + 11, \quad 40g + 19.$$

2. Le plus petit nombre premier que la formule

$$A^2 + 20B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, est 29. On a

$$29 = 3^2 + 20.1^2.$$

Aussi trouvons-nous pour 29 l'équation canonique

$$29 = 10.1^2 + 19\,1^2.$$

Viennent ensuite les nombres premiers

$$101, \quad 181, \quad 229,$$

pour lesquels on a

$$101 = 9^2 + 20.1^2,$$
$$181 = 1^2 + 20.3^2,$$
$$229 = 7^2 + 20.3^2.$$

Comme on peut en retrancher 10 et 90, on aura deux restes, et il faudra (d'après notre théorème) qu'un de ces restes soit canonique et que l'autre ne le soit pas. Or je trouve, en effet, relativement à chacun

de ces nombres, un reste canonique. Pour 101, c'est

$$101 - 90 = 11.1^2;$$

pour 181, c'est

$$181 - 10 = 19.3^2;$$

enfin, pour 229, c'est

$$229 - 90 = 139.1^2.$$

Les restes non canoniques sont

$$101 - 10 = 91 = 7.13,$$
$$181 - 90 = 91 = 7.13,$$
$$229 - 10 = 219 = 3.73.$$

Pour le nombre premier

$$349$$

qui s'exprime ainsi

$$349 = 13^2 + 20.3^2$$

et dont on peut retrancher

$$10,\ 90,\ 250,$$

il y a trois restes, dont deux non canoniques, savoir

$$349 - 10 = 339 = 3.113$$

et

$$349 - 90 = 259 = 7.37,$$

mais un canonique

$$349 - 250 = 11.3^2,$$

ce qui suffit pour l'exactitude de notre théorème.

Même conclusion au sujet du nombre premier

$$461$$

pour lequel on a l'équation

$$461 = 21^2 + 20.1^2.$$

En en retranchant 10 et 90, on a deux restes non canoniques, car

$$461 - 10 = 451 = 11.41$$

et

$$461 - 90 = 371 = 7.53.$$

Mais en en retranchant 250 on a le reste canonique

$$461 - 250 = 211.1^2.$$

Le nombre premier

$$509$$

qui s'exprime par

$$3^2 + 20.5^2$$

remplit la condition imposée par notre théorème. On peut en retrancher 10, 90, 250 et 490, de sorte qu'il y a cette fois quatre restes à considérer. Or en en retranchant 250, on a un reste non canonique égal à 7.37; les trois autres restes

$$509 - 10 = 499.1^2,$$
$$509 - 90 = 419.1^2,$$
$$509 - 490 = 19.1^2,$$

sont canoniques puisque 499, 419 et 19 sont des nombres premiers.

Viennent enfin les deux nombres premiers

$$541 = 19^2 + 20.3^2$$

et

$$709 = 23^2 + 20.3^2,$$

pour chacun desquels on a une seule équation canonique, d'une part

$$541 = 10.1^2 + 59.3^2,$$

et d'autre part

$$709 = 10.3^2 + 619.1^2.$$

Je ne m'arrête pas à transcrire ici les restes non canoniques, ni à prolonger ces vérifications.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+36B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Les nombres premiers m compris dans la formule quadratique

$$A^2+36B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent tous de la propriété suivante, à savoir que l'on peut pour chacun d'eux poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m compris dans la formule A^2+36B^2, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$18.1^2,\ 18.3^2,\ 18.5^2,\ 18.7^2,\ \text{etc.},$$

savoir

$$18,\quad 162,\quad 450,\quad 882,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p;

mais comme on a

$$m \equiv 5 \pmod{8}$$

et

$$m \equiv 1 \pmod{3},$$

l'équation

$$m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraînera naturellement ces deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8}$$

et

$$p \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ainsi p ne peut être que de la forme $24g + 19$.

2. Les plus petits nombres premiers que la formule

$$A^2 + 36B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, sont 37, 61, 157. On a

$$\begin{aligned} 37 &= 1^2 + 36.1^2, \\ 61 &= 5^2 + 36.1^2, \\ 157 &= 11^2 + 36.1^2. \end{aligned}$$

Or ces nombres, dont on ne peut retrancher que 18, donnent lieu chacun à une équation canonique, attendu que

$$\begin{aligned} 37 &= 18.1^2 + 19.1^2, \\ 61 &= 18.1^2 + 43.1^2, \\ 157 &= 18.1^2 + 139.1^2, \end{aligned}$$

où 19, 43, 139 sont des nombres premiers.

Viennent ensuite 349, 373 et 397, pour lesquels on a

$$\begin{aligned} 349 &= 5^2 + 36.3^2, \\ 373 &= 7^2 + 36.3^2, \end{aligned}$$

puis

$$397 = 19^2 + 36.1^2.$$

Ici, en retranchant 18 et 162, on aura deux restes; or un seul de ces restes sera canonique. Ainsi, relativement au nombre premier 349, on a

$$349 - 18 = 331.1^2,$$

équation canonique; mais l'autre équation

$$349 - 162 = 187 = 11.17$$

n'est pas canonique. Pour 373, on a l'équation non canonique

$$373 - 18 = 355 = 5.71$$

et l'équation canonique

$$373 = 18.3^2 + 211.1^2,$$

où 211 est un nombre premier. Enfin, pour le nombre premier 397, l'équation

$$397 = 18.1^2 + 379.1^2$$

est canonique; mais l'équation

$$397 - 162 = 235 = 5.47$$

ne l'est pas.

Considérons enfin les nombres premiers

$$613,\ 661,\ 853,\ 877.$$

Comme on a

$$613 = 17^2 + 36.3^2,$$
$$661 = 25^2 + 36.1^2,$$
$$853 = 23^2 + 36.3^2,$$
$$877 = 29^2 + 36.1^2,$$

ces nombres remplissent les conditions imposées par notre théorème

D'ailleurs, on peut en retrancher

$$18, \ 162, \ 450.$$

On aura donc, pour chacun d'eux, trois restes; et si notre théorème est exact, il faudra que ces trois restes soient canoniques, ou qu'un seul le soit. Le premier cas arrive pour 661, car on a les équations canoniques

$$661 = 18.1^2 + 643.1^2,$$
$$661 = 18.3^2 + 499.1^2,$$
$$661 = 18.5^2 + 211.1^2,$$

où 643, 499, 211 sont des nombres premiers. Mais pour 613, 853 et 877, on n'a qu'un seul reste canonique indiqué par les équations respectives

$$613 - 450 = 163.1^2,$$
$$853 - 162 = 691.1^2,$$
$$877 - 18 = 859.1^2.$$

Les autres restes, que voici :

$$613 - 18 = 595 = 5.7.17,$$
$$613 - 162 = 451 = 11.41,$$
$$853 - 18 = 835 = 5.167,$$
$$853 - 450 = 403 = 13.31,$$
$$877 - 162 = 715 = 5.11.13,$$
$$877 - 450 = 427 = 7.61$$

sont non canoniques. Je ne pousserai pas plus loin ces calculs.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS

CONTENUS DANS LA FORMULE $A^2 + 44B^2$, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2 + 44B^2,$$

en y prenant B impair, possèdent une propriété commune, à savoir que l'on peut pour chacun d'eux poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 22x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m compris dans la formule $A^2 + 44B^2$, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$22.1^2,\ 22.3^2,\ 22.5^2,\ 22.7^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$22,\quad 198,\quad 550,\quad 1078,\quad \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p; mais comme on a

$$m \equiv 5 \pmod{8},$$

et qu'en outre m est évidemment résidu quadratique de 11, il résulte de l'équation

$$m = 22x^2 + p^{4l+1}y^2$$

que l'on ne peut pas manquer d'avoir

$$p \equiv 7 \pmod{8}$$

et que de plus p sera résidu quadratique de 11. Donc p doit appartenir à l'une des cinq formes linéaires

$$88g + 15,\ 88g + 23,\ 88g + 31,\ 88g + 47,\ 88g + 71$$

2. Le plus petit nombre premier que la formule

$$A^2 + 44B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, est 53. On a

$$53 = 3^2 + 44.1^2.$$

Or je trouve en effet pour 53 une équation canonique :

$$53 = 22.1^2 + 31.1^2.$$

Viennent ensuite les nombres premiers 269, 397, 421, qui vérifient les identités

$$269 = 15^2 + 44.1^2,$$
$$397 = 1^2 + 44.3^2,$$
$$421 = 5^2 + 44.3^2,$$

et dont on peut retrancher 22 et 198. Ainsi, pour chacun de ces nombres, il y aura deux restes; et, d'après notre théorème, il faut que l'un de ces deux restes soit canonique et que l'autre ne le soit

pas. Or cela a lieu en effet. Les restes canoniques sont

$$269 - 198 = 71.1^2$$

pour 269, puis

$$397 - 198 = 199.1^2$$

pour 397, enfin

$$421 - 198 = 223.1^2$$

pour 421. Les autres restes sont non canoniques. On a d'abord

$$269 - 22 = 247 = 13.19;$$

ensuite

$$397 - 22 = 375 = 3.5^3,$$

où l'exposant 3 n'a pas la forme voulue $4l + 1$; enfin

$$421 - 22 = 399 = 3.7.19.$$

Considérons, en dernier lieu, les nombres premiers

$$757$$

et

$$773.$$

Ils remplissent la condition imposée par notre théorème, attendu que l'on a

$$757 = 19^2 + 44.3^2$$

et

$$773 = 27^2 + 44.1^2.$$

De plus, chacun d'eux donnera lieu à trois restes, puisque l'on peut en retrancher 22, 198 et 550. Il faut donc, ou que ces trois restes soient canoniques, ou qu'un d'entre eux le soit, les deux autres ne l'étant pas.

Or je trouve en effet, pour 757, deux restes non canoniques, savoir

$$757 - 22 = 735 = 3.5.7^2$$

et

$$757 - 198 = 559 = 13.43.$$

avec un reste canonique

$$757 - 550 = 23.3^2.$$

D'un autre côté, pour 773, j'obtiens trois restes canoniques, d'abord

$$773 - 22 = 751.1^2,$$

puis

$$773 - 198 = 23.5^2,$$

enfin

$$773 - 550 = 223.1^2.$$

Notre théorème est donc constamment vérifié.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+56B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2+56B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent tous de cette propriété, que pour chacun d'eux on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m=28x^2+p^{4l+1}y^2,$$

x, y désignant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m, contenu dans la formule A^2+56B^2, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$28.1^2,\ 28.3^2,\ 28.5^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$28,\quad 252,\quad 700,\quad \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p; mais comme m est $\equiv 1 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 7, l'équation

$$m = 28x^2 + p^{4l+1}y^2$$

ne peut avoir lieu que pour $p \equiv 5 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 7. Donc p doit appartenir à l'une des trois formes linéaires

$$56g + 29,\ 56g + 37,\ 56g + 53.$$

2. Les plus petits nombres premiers fournis par l'expression $A^2 + 56B^2$, en y prenant B impair, sont 137 et 281; on a

$$137 = 9^2 + 56.1^2$$

et

$$281 = 15^2 + 56.1^2.$$

Notre théorème se vérifie sur ces deux nombres, au moyen des équations canoniques

$$137 = 28.1^2 + 109.1^2$$

et

$$281 = 28.3^2 + 29.1^2;$$

le reste 253, obtenu en retranchant 28 de 281, n'est pas canonique, car

$$253 = 11.23.$$

Je ne crois pas devoir pousser plus loin ces vérifications numériques.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+116B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2 + 116B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent de cette propriété commune, que, pour chacun d'eux, on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 58x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y désignant des entiers impairs et p un nombre premier non diviseur de y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un entier donné m contenu dans la formule $A^2 + 116B^2$, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$58.1^2,\ 58.3^2,\ 58.5^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$58,\quad 522,\quad 1450,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p; mais comme m est $\equiv 5 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 29, on voit par l'équation même de la question

$$m = 58x^2 + p^{4l+1}y^2$$

que chaque nombre p sera $\equiv 3 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 29.

2. Les nombres premiers les plus petits que la formule

$$A^2 + 116B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, sont 197 et 557; on a

$$197 = 9^2 + 116.1^2$$

et

$$557 = 21^2 + 116.1^2.$$

Notre théorème se vérifie sur ces deux nombres, au moyen des équations canoniques

$$197 = 58.1^2 + 139.1^2$$

et

$$557 = 58.1^2 + 499.1^2,$$

où 139 et 499 sont des nombres premiers. Le reste 35, obtenu en retranchant 522 de 557, n'est pas canonique; car $35 = 7.5$.

Je me bornerai à ces deux exemples

MÉMOIRE

Sur les divers genres d'homogénéité des corps solides, et principalement sur l'homogénéité semi-polaire *ou cylindrique, et sur les homogénéités* polaires *ou sphériconique et sphérique;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Lu à l'Académie des Sciences le 21 mai 1860.

1. *Définitions; objet.* — On connaît la distinction établie par Cauchy entre un corps solide *isotrope* et un corps solide qui est simplement *homogène*, quant à ses propriétés élastiques. Un solide est isotrope si, *tournée* ou envisagée n'importe comment, sa matière est identique à elle-même, c'est-à-dire si elle offre *partout* et *en tous sens* la même contexture; ou si, non-seulement en tous ses points, mais encore suivant toutes les directions, les mêmes petits déplacements moléculaires y développent les mêmes réactions mécaniques.

Il n'est qu'homogène si sa matière offre la même élasticité ou les mêmes réactions en tous les points dans des directions *homologues*, mais non pas en tous sens autour de chaque point.

D'après cela, les corps régulièrement cristallisés sont homogènes et non isotropes. Il peut en être de même de corps *amorphes* ou à cristallisation confuse, tels qu'une plaque métallique laminée, car elle a presque toujours des forces élastiques de grandeurs différentes dans le sens de l'épaisseur, dans le sens de la largeur et dans le sens de la longueur [*].

[*] C'est à quoi n'ont sans doute pas songé plusieurs savants de l'Angleterre et de l'Allemagne, qui semblent n'attribuer l'hétérotropie qu'aux corps cristallins. (*Voir* mon *Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un*

Mais, outre l'homogénéité en quelque sorte *parallèle* ou *rectiligne* qui se présente dans ces deux exemples, et qui a été seule considérée jusqu'à présent, il peut y en avoir une infinité d'autres.

Qu'on enroule en tuyau cylindrique cette plaque homogène rectangulaire non isotrope supposée mince, en dirigeant, par exemple, les génératrices dans le sens de sa longueur. *Elle ne cessera pas d'être homogène;* mais l'égalité d'élasticité aux divers points n'aura pas lieu pour des directions parallèles entre elles. Il y aura égale élasticité suivant les rayons qui vont tous couper perpendiculairement l'axe du cylindre : ce sera l'élasticité dans le sens de l'épaisseur. Il y aura égale élasticité suivant les diverses tangentes aux cercles ayant leur centre sur cet axe. Il n'y aura que les élasticités égales suivant la longueur qui auront conservé des directions parallèles entre elles.

C'est ce que l'on peut appeler l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique; elle a généralement lieu pour les tubes étirés ou coulés, et aussi pour les pièces de bois de droit fil.

Quelque chose de plus compliqué et d'analogue cependant aura lieu si l'enroulement de la plaque en cylindre se fait obliquement à ses dimensions, ou si on l'opère en cône, etc.

Qu'on imagine maintenant une sphère solide pleine ou creuse, ou un corps de forme quelconque divisible en couches sphériques concentriques. Si la résistance ou la réaction élastique, pour mêmes déplacements de ses points, est partout égale dans le sens des rayons, et partout égale aussi dans certains sens perpendiculaires entre eux et aux rayons, ceux par exemple où se comptent les latitudes et les longitudes pour un équateur donné, la matière est homogène, mais *polairement*, ou d'une manière que nous pouvons appeler *sphériconique* vu le rôle qu'y jouent les *cônes de latitude* (ci-après, n^os **9** et **10**) ayant un axe déterminé, le même pour tous.

On peut aller plus loin et dire qu'il y a autant de genres d'homogénéité mécanique qu'il y a de systèmes possibles de coordonnées curvilignes ou de systèmes de surfaces orthogonales conjuguées. Tous

---

milieu de contexture quelconque, particulièrement quand il est amorphe sans être isotrope, inséré dans ce même Journal, 1864).

les genres peuvent être compris dans cette définition, qui s'appliquerait même à des propriétés de toute sorte, mécaniques ou autres :

Un corps est homogène lorsque l'un quelconque de ses éléments imperceptibles est identique à tout élément du même corps, pris ailleurs, ayant même volume et même forme, mais orienté d'une certaine manière qui peut changer d'un endroit à l'autre. Il l'est même encore lorsque cette identité de deux éléments, pris n'importe où et convenablement orientés, souffre exception pour certains points isolés ou *ombilicaux* (tels que sont ceux de l'intersection commune des plans des cercles de longitude de la sphère dont on vient de parler, comme on dira au n° **11**).

Le mode d'orientation des éléments, ou la direction relative de leurs lignes homologues, détermine le genre de l'homogénéité, genre dont chacun admet, comme nous verrons au n° **5**, des *sous-genres* où les orientations possibles en chaque point sont multiples.

Les corps isotropes réunissent tous les genres d'homogénéité; leurs éléments sont identiques de quelque manière qu'ils soient orientés.

Mais, comme l'ont remarqué depuis longtemps Savart [*] et M. Regnault [**], l'isotropie est rare, même dans les solides *coulés*, dont la contexture s'est constituée par refroidissement rapide après fusion. Une plaque de fonte, un vase de verre, etc., peuvent offrir en divers sens des élasticités inégales, tout comme une feuille ou un tube de tôle; et c'est même, comme je l'ai montré ailleurs à la suite d'une discussion détaillée [***], la seule conclusion qu'on doive tirer des différences qui ont été trouvées entre les résultats de quelques expériences, et ceux de calculs faits avec des formules d'*isotropie* à un seul coefficient; formules qui sont les conséquences obligées et rigoureuses

---

[*] *Annales de Chimie et de Physique*, t. XLI, 1829, p. 373, *Essai sur la réaction de torsion.*

[**] *Relation des expériences entreprises pour déterminer les principales lois physiques et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur*, 1re partie, 1847, t. XXI des *Mémoires de l'Institut*, p. 432.

[***] Nouvelle édition annotée (1864) des *Leçons de Navier*, à l'Appendice V, dont on peut consulter surtout les §§ 49, 54, 68 et surtout 75.

de la loi des actions moléculaires *que tout le monde invoque ouvertement ou tacitement*, et même sans laquelle tout établissement de formules mathématiques d'élasticité est illusoire [*].

Il est donc désirable de pouvoir poser et traiter les formules relatives aux corps hétérotropes comme celles qui s'appliquent aux corps isotropes.

C'est ce que j'ai fait dans de précédents Mémoires pour des cas de torsion et de flexion de prismes doués de l'homogénéité que nous venons d'appeler parallèle ou rectiligne, où les éléments identiques ont tous la même orientation [**].

Je me propose, dans celui-ci, d'établir les principes généraux propres aux homogénéités de tout genre, et, comme application, de résoudre quelques problèmes sur un cylindre creux et sur une sphère creuse, hétérotropes et doués des homogénéités qu'on vient de définir.

2. *Caractère et expression analytique d'un genre quelconque d'homogénéité.* — Imaginons trois droites matérielles extrêmement petites et rectangulaires

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z} \quad \text{ou} \quad m\mathrm{x},\ m\mathrm{y},\ m\mathrm{z}$$

partant d'un même point m d'un corps élastique pris dans l'état dit *naturel*, où aucune force extérieure n'agit sur lui [***]. Puis, le corps ayant éprouvé ensuite une petite déformation qui change les distances et les actions mutuelles de ses parties et engendre en conséquence des pressions ou tensions à son intérieur, appelons respectivement

$$\partial_{\mathrm{x}},\ \partial_{\mathrm{y}},\ \partial_{\mathrm{z}} \quad \text{et} \quad g_{\mathrm{yz}},\ g_{\mathrm{zx}},\ g_{\mathrm{xy}}$$

---

[*] *Leçons de Navier*, Appendices, §§ 21, 56, 75, et, dans le même ouvrage, l'*Historique*, nos XXII, XLIII; et aussi le no 2 du *Mémoire* cité *sur la distribution des élasticités*, 1864, p. 269-270.

[**] *Savants étrangers*, t. XIV, *De la torsion des prismes; Journal de M. Liouville*, 1856, *De la flexion*; et *Notes sur Navier*.

[***] Nouvelle édition de Navier, Appendice III, § 22, et Appendice complémentaire, § 80.

les trois *dilatations*, dans les sens de ces droites, c'est-à-dire les proportions très-petites des allongements qu'elles ont éprouvés, et les trois *glissements* relatifs intérieurs, mesurés par les cosinus des angles légèrement aigus dans lesquels se sont changés $y m z$, $z m x$, $x m y$; quantités qui déterminent complétement la déformation dans une petite étendue autour du point m. On a, comme on sait, pour les six composantes, suivant les mêmes trois droites, des pressions ou tensions p à travers l'unité superficielle de trois petites faces qui leur sont perpendiculaires, ayant leur centre en m, les expressions suivantes, où la première sous-lettre affectant p désigne la face par sa normale, et, la seconde, le sens de décomposition :

(1) [*]
$$\left\{\begin{aligned}
p_{xx} &= a_{xxxx}\partial_x + a_{xxyy}\partial_y + a_{xxzz}\partial_z + a_{xxyz}g_{yz} + a_{xxzx}g_{zx} + a_{xxxy}g_{xy},\\
p_{yy} &= a_{yyxx}\partial_x + a_{yyyy}\partial_y + a_{yyzz}\partial_z + a_{yyyz}g_{yz} + a_{yyzx}g_{zx} + a_{yyxy}g_{xy},\\
p_{zz} &= a_{zzxx}\partial_x + a_{zzyy}\partial_y + a_{zzzz}\partial_z + a_{zzyz}g_{yz} + a_{zzzx}g_{zx} + a_{zzxy}g_{xy},\\
p_{yz} &= a_{yzxx}\partial_x + a_{yzyy}\partial_y + a_{yzzz}\partial_z + a_{yzyz}g_{yz} + a_{yzzx}g_{zx} + a_{yzxy}g_{xy},\\
p_{zx} &= a_{zxxx}\partial_x + a_{zxyy}\partial_y + a_{zxzz}\partial_z + a_{zxyz}g_{yz} + a_{zxzx}g_{zx} + a_{zxxy}g_{xy},\\
p_{xy} &= a_{xyxx}\partial_x + a_{xyyy}\partial_y + a_{xyzz}\partial_z + a_{xyyz}g_{yz} + a_{xyzx}g_{zx} + a_{xyxy}g_{xy};
\end{aligned}\right.$$

$a_{xxxx},\ldots, a_{xyyx}$ sont des coefficients qui dépendent de la contexture du corps dans la même petite étendue où le point m se trouve compris; coefficients ou paramètres qui de trente-six se réduisent à vingt et un distincts *au plus*, vu l'égalité nécessaire, irréfragablement prouvée par Green [**], entre ceux qui, comme a_{xxyz} et a_{yzxx}, ne diffèrent que par l'ordre où sont placés leurs deux groupes de deux indices ou sous-lettres.

---

[*] *Voyez* dans ce Journal, année 1864, *Mémoire sur la distribution des élasticités, etc.*, n° 3, p. 272, et aussi, nouvelle édition de Navier, 1864, Appendice complémentaire, § 84, p. 795, ce qu'il faut ajouter aux formules (1) quand le corps part d'un autre état que l'état naturel, ou quand il y avait, antérieurement aux déformations ∂_x, $\partial_y,\ldots$, g_{yx} éprouvées, des pressions intérieures et extérieures p^0_{xx}, $p^0_{yy},\ldots$, p^0_{xy}.

[**] *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107.

Il faut même, avec Cauchy, Poisson, etc., réduire ces paramètres *seulement à quinze* en vertu de cette grande loi des actions fonctions des distances dont on ne peut pas, disons-nous, se passer en Mécanique physique, et dont on tire *six* égalités complémentaires, telles que

$$a_{xxyy} = a_{xyxy}, \quad a_{xxyz} = a_{xyzx},$$

ce qui fait toutes les vingt et une égalités susceptibles d'être posées entre ceux des coefficients qui portent les quatre mêmes sous-lettres quel que soit leur arrangement.

Mais pour montrer que ce qui suit est indépendant de l'existence de ces six dernières égalités, auxquelles plusieurs savants refusent d'acquiescer, nous n'opérerons, comme Green, que la réduction des trente-six coefficients à vingt et un dans le cas le plus général de contexture, ce qui en conserve, quand il y a isotropie, *deux* qu'il n'y a aucun inconvénient à traiter comme inégaux dans les formules, sauf à les faire égaux dans les applications, si l'on est convaincu, comme je le suis, de leur égalité.

La place de ces divers coefficients dans les formules (1) montre suffisamment le rôle de chacun dans les propriétés élastiques d'une matière hétérotrope. Les coefficients a_{xxxx}, a_{yyyy}, a_{zzzz}, par lesquels il faut multiplier les dilatations pour avoir les pressions qu'elles engendrent dans leurs sens, sur des faces qui leur sont perpendiculaires, sont appelés *élasticités directes*. Ceux a_{yzyz}, a_{zxzx}, a_{xyxy} sont les *élasticités tangentielles*. Ceux a_{yyzz}, a_{zzxx}, a_{xxyy} sont appelés (par les auteurs qui les croient inégaux aux trois précédents) *élasticités latérales*. Enfin M. Rankine a nommé *élasticités asymétriques* les autres, tels que a_{xxyz}, a_{xxxy}, etc., qui sont nuls (n° suivant) lorsqu'il y a, au point considéré, trois plans de symétrie de contexture, perpendiculaires aux lignes x, y, z.

Ces formules (1) de composantes de pression sur trois faces orthogonales conviennent à des corps hétérogènes comme à des corps homogènes.

Elles sont applicables, par conséquent, pour tous les genres d'homogénéité.

Si x, y, z ont partout les mêmes directions, parallèles respective-

ment à trois axes coordonnés fixes x, y, z, et si les coefficients a ont les mêmes grandeurs pour tous les points m d'un corps, ce corps jouit de l'homogénéité *parallèle* ou *rectiligne;* car les petits éléments parallélipipèdes de mêmes dimensions, orientés de même, donnent, pour mêmes déformations éprouvées $\partial_x, \ldots, g_{xy}$, les mêmes pressions ou réactions élastiques $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$.

Si, $a_{xxxx}, \ldots, a_{xyxy}$ ayant encore les mêmes grandeurs partout, les directions des lignes orthogonales x, y, z varient d'un point à l'autre suivant une certaine loi, le corps est homogène, mais d'un autre genre.

Tous les genres d'homogénéité sont donc caractérisés par les équations (1) avec les vingt et un ou quinze coefficients $a_{xxxx}, \ldots, a_{xyxy}$ *constants,* en prenant, en chaque point, les directions x, y, z normales aux surfaces orthogonales conjuguées du système de coordonnées auquel répond le genre particulier d'homogénéité que l'on considère.

5. *Sous-genres répondant à des symétries de contexture de la matière en chaque point; homogénéité simplement sphérique.* — Chaque genre d'homogénéité se subdivise naturellement, tout comme le genre ordinaire ou parallèle, en une infinité d'espèces répondant aux valeurs particulières, en nombre infini, des coefficients a.

Mais, pour chacun, il y a aussi des *sous-genres,* où un élément, pris dans un endroit quelconque, peut trouver dans tout autre endroit son identique suivant *deux* ou *plusieurs* orientations.

Cette possibilité de *deux* orientations aura lieu si, partout, la contexture du corps est symétrique mécaniquement par rapport au plan tangent à l'une des trois surfaces coordonnées qui caractérisent le genre de l'homogénéité; car tout élément sera identique avec l'élément qui lui est symétrique par rapport à ce plan.

Si x représente en direction la normale à cette surface ou à ce plan de symétrie, les termes en g_{zx}, g_{xy} doivent disparaître des quatre premières expressions (1), et subsister seuls dans les deux dernières; il le faut pour que celles-là restent les mêmes et que celles-ci ne fassent que changer de signe lorsqu'on change simplement le sens de la

ligne x, c'est-à-dire quand on la remplace par son prolongement symétrique de l'autre côté de la face yz [*].

Si la symétrie de contexture a lieu par rapport au plan tangent à une deuxième face zx, cela entraîne la symétrie par rapport à la troisième xy; et l'on a un sous-genre pour lequel l'orientation possible est sextuple, c'est-à-dire qu'un élément pris n'importe où trouve partout son identique dans six positions différentes. Alors les expressions (1) se réduisent à la forme suivante en x, y, z, comme on sait que cela a lieu en x, y, z pour le genre parallèle ou ordinaire :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= a\,\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z, \\ p_{yy} &= f'\partial_x + b\,\partial_y + d'\partial_z, \\ p_{zz} &= e'\partial_x + d'\partial_y + c\,\partial_z, \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \begin{aligned} p_{yz} &= d g_{yz}, \\ p_{zx} &= e g_{zx}, \\ p_{xy} &= f g_{xy}. \end{aligned}$$

J'affecte d'accents trois des coefficients, par le motif énoncé au numéro précédent, et bien que, dans mon intime conviction, non encore généralement partagée, les élasticités latérales d', e', f' soient égales respectivement aux élasticités tangentielles d, e, f.

Et si, en chaque endroit, dans une petite étendue, x ou mx est un axe de symétrie de la matière du corps, chaque élément, transporté ailleurs, y trouve son identique dans une infinité de positions symétriques par rapport à cet axe. Alors on a, toujours comme pour l'homogénéité parallèle [**],

$$\text{non-seulement}\quad b = c,\ \ e = f,\ \ e' = f',\quad \text{mais encore}\quad b = 2d + d';$$

ce qui est la condition pour que les six expressions p restent composées de la même manière et avec les mêmes coefficients en fonction des ∂ et g relatifs à leurs directions lorsqu'on fait tourner my et mz, autour de mx, d'un angle infiniment petit, et, par suite, d'un angle quelconque.

---

[*] *Voyez* le tome de 1856 de ce Journal, *Mémoire sur la flexion*, art. 9, ou la nouvelle édition annotée des *Leçons de Navier*, Appendice III, § 24.

[**] *Voyez* le tome de 1856 de ce Journal, *Mémoire sur la flexion*, art. 9, ou la nouvelle édition annotée des *Leçons de Navier*, Appendice III, § 24.

Ainsi, lorsque, dans le genre polaire ou sphériconique (n° **1**), tous les rayons sont des axes de symétrie, on peut prendre indifféremment pour équateur tout plan passant par le centre, et l'on a un sous-genre qui peut être appelé simplement *sphérique* (ci-après n° **10**).

Si, en même temps que mx, my est axe de symétrie de contexture, mz l'est par cela seul, ainsi que toute droite tirée par m. Tout élément a son identique dans toutes les situations ou orientations possibles, et il y a *isotropie* pour tous les systèmes de coordonnées.

Il ne reste alors, dans les formules, que deux coefficients d, d' (ou plutôt, disons-nous, un seul $d = d'$, d'après la loi des actions matérielles).

En excluant les cristaux proprement dits, bornons-nous à considérer les corps *amorphes* ou à cristallisation confuse, tels que sont les métaux, etc. Ils peuvent être regardés comme ayant en chaque point trois plans de symétrie de contexture. En effet, comme nous avons dit à un autre Mémoire [*], ils sont constitués comme si leur matière, primitivement isotrope, avait été comprimée ou dilatée en divers sens. Or, on sait que ces dilatations ou compressions peuvent être toujours réduites à trois, dites *principales*, dans des directions rectangulaires.

Les formules (2), en choisissant les x, y, z dans ces trois directions, sont donc applicables à tous les corps que nous considérons ici.

Mais il y a plus. Les neuf (ou six) coefficients a, b,..., f' de ces formules (2) n'ont pas entre eux tous les rapports numériques possibles. Des considérations analytiques simples, confirmées par les seules expériences qui aient été faites sur les élasticités dans diverses directions obliques l'une à l'autre, conduisent à admettre entre eux les relations constantes suivantes, dites *de distribution ellipsoïdale* des élasticités directes [**] :

$$2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab};$$

---

[*] Dans ce Journal, 1864, *Mémoire* cité *sur la distribution des élasticités, principalement dans les corps solides amorphes sans être isotropes*, n°s 13 à 16 et 28, 29 ; et aussi, 3e édition (annotée) de Navier, Appendice complémentaire, §§ 89, 90, 92.

[**] Ou donnant un ellipsoïde pour la surface dont les rayons vecteurs sont les

telles, évidemment, que si l'on a b = c par exemple, x est un axe de symétrie par cela seul, et que si a = b = c, il y a isotropie. Il en résulte, en tirant a, b, c et effaçant les accents, les formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} p_{xx} = 3\frac{ef}{d}\partial_x + f\partial_y + e\partial_z, & p_{yz} = dg_{yz}, \\ p_{yy} = f\partial_x + 3\frac{fd}{e}\partial_y + d\partial_z, \quad \text{et} & p_{zx} = eg_{zx}, \\ p_{zz} = e\partial_x + d\partial_y + 3\frac{de}{f}\partial_z, & p_{xy} = fg_{xy}, \end{array}\right.$$

à trois paramètres seulement; formules qui suffisent pour tous les corps amorphes, et par conséquent pour tous les matériaux employés dans les constructions et les machines. Elles devraient être généralement employées, en abandonnant ces formules fautives d'isotropie à deux paramètres, par lesquelles quelques auteurs ont cherché, avons-nous dit, à interpréter divers faits.

4. *Problème des déplacements éprouvés par les divers points sous l'empire de forces extérieures données.* — Pour poser les équations différentielles dont l'intégration est propre à donner ces déplacements, supposés très-petits, et estimés ou projetés partout sur les trois normales aux surfaces coordonnées, deux procédés peuvent être mis en usage.

Le premier consiste à exprimer, si on le peut, par des considérations géométriques et pour un point quelconque m du corps, les dilatations et glissements

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \quad g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$$

qui entrent dans les formules (1), (2) ou (3) en fonction des dérivées par rapport aux coordonnées choisies, linéaires ou *angulaires*, que

inverses des racines quatrièmes des coefficients tels que a_{xxxx} par lesquels il faut multiplier une dilatation ∂_x pour avoir la pression normale p_{xx} qu'elle engendre sur une face perpendiculaire à sa direction x; et donnant aussi un ellipsoïde avec les racines quatrièmes des *modules d'élasticité* (E de Navier) de la matière dans les mêmes sens.

nous appellerons

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

des projections

$$\mathrm{U},\ \mathrm{V},\ \mathrm{W}$$

des déplacements, suivant les directions

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}$$

qui sont, avons-nous dit, celles des normales aux surfaces coordonnées menées par le point m dont les coordonnées sont α, β, γ;

Et, par des considérations du même genre, à poser en

$$p_{\mathrm{xx}},\ p_{\mathrm{yy}},\ldots,\ p_{\mathrm{xy}}$$

et leurs dérivées par rapport à α, β, γ, les trois équations d'équilibre de translation, aussi suivant les directions normales x, y, z, d'un petit élément solide compris entre six des surfaces orthogonales, infiniment voisines deux à deux, ayant m pour un de ses angles ou bien pour son point central.

De cette manière, en mettant pour $p_{\mathrm{xx}},\ldots, p_{\mathrm{xy}}$ leurs expressions (1) ou (2) ou (3) en $\partial_{\mathrm{x}},\ldots, g_{\mathrm{xy}}$, et, pour ces dilatations et glissements, leurs valeurs trouvées en U, V, W, α, β, γ, l'on aura obtenu les équations différentielles *indéfinies*, ou s'appliquant à tous les points, et ce qu'il faut pour poser les équations *définies*, exprimant que les pressions aux divers points de la surface ont des grandeurs données.

Le second procédé, tout analytique, consiste à partir des expressions déjà connues suivantes, donnant les dilatations et glissements parallèlement à des axes coordonnés rectangles x, y, z, en fonction des projections

$$u,\ v,\ w,$$

dans leurs directions, des déplacements supposés très-petits aussi, ou ramenés à être tels dans chaque petite étendue :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \partial_x = \dfrac{du}{dx}, & \partial_y = \dfrac{dv}{dy}, & \partial_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}, & g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, & g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}, \end{array}\right.$$

et à partir aussi des équations, également connues,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz}=X,\\ &\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}=Y,\\ &\frac{dp_{zx}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}=Z, \end{aligned}\right.$$

exprimant l'équilibre de translation, parallèlement aux trois mêmes axes fixes, d'un élément intérieur compris entre six plans qui leur sont perpendiculaires, et sur les points duquel agit, à la manière de la pesanteur, une force dont les composantes parallèles à x, y, z sont appelées

$$X,\ Y,\ Z \text{ par unité de volume.}$$

Puis, comme ces équations (4), (5) sont vraies pour des corps de toutes les contextures, on opère un changement de variables indépendantes qui permet d'y remplacer toutes les dérivées en x, y, z par des dérivées en α, β, γ, après avoir, dans les seconds membres $\frac{du}{dx}$, etc., de (4), mis pour u, v, w leurs expressions en U, V, W, faciles à trouver d'après l'état de la question. Il ne restera ainsi qu'à faire des substitutions des expressions (4) de $\partial_x,\ldots,\ g_{xy}$ dans les formules de transformation connues (i) ci-après qui donnent

$$\partial_{\rm x},\ \partial_{\rm y},\ldots,\ g_{\rm xy} \quad \text{en fonction de} \quad \partial_x,\ \partial_y,\ldots,\ g_{xy}$$
$$\text{et des angles de } {\rm x},\ {\rm y},\ {\rm z} \text{ avec } x,\ y,\ z,$$

et qu'à faire, à l'inverse, des substitutions, aux p_{xx}, $p_{yy},\ldots,\ p_{xy}$, de leurs expressions, fournies par le théorème connu de projections de plans de pression, en fonction des composantes $p_{\rm xx}$, $p_{\rm yy},\ldots,\ p_{\rm xy}$, dont les valeurs sont données par (1) ou (2) ou (3), pour obtenir les relations et équations différentielles que l'on cherchait.

M. Lamé a employé avec succès [*], pour ce qui regarde l'établis-

---

[*] *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, 1852, § 77 pour les coordonnées semi-polaires, et § 83 pour les coordonnées polaires.

sement des trois équations d'équilibre intérieur, un procédé en quelque sorte *mixte*, moins direct que le premier, mais plus simple que la partie du second qui est relative à ces équations. Il consiste, en considérant, comme dans le premier procédé, les forces agissant tant sur les six faces qu'à l'intérieur de l'élément compris entre des surfaces courbes coordonnées, et dont un des huit angles est occupé par le point m que l'on considère, à égaler à zéro leurs trois sommes de composantes, non pas sur les directions x, y, z des trois côtés ou des trois normales émanant de ce point, mais suivant les directions fixes de trois axes coordonnés x, y, z. Ces composantes, en effet, sont toujours facilement exprimables, quant aux pressions sur les trois faces adjacentes à m, en fonction de celles p_{xx}, p_{yy},..., p_{xy} des pressions qui s'exercent sur l'unité superficielle de chacune; car on connaît, et les neuf cosinus des angles de x, y, z avec x, y, z, et les trois superficies par lesquelles il faut multiplier les composantes des pressions sur l'unité, pour avoir celles qui agissent, en chaque sens, sur les trois premières faces dont on vient de parler. Ensuite, pour avoir les excès, sur celles-ci, des neuf composantes, dans les mêmes sens fixes x, y, z, des pressions sur les faces respectivement opposées, et qui ne sont en général ni égales ni parallèles exactement aux pressions sur les premières faces, il suffit de prendre les dérivées des composantes de pressions déjà trouvées, par rapport à α, β, γ, et de multiplier par les distances deux à deux, pour lesquelles on peut prendre les longueurs des trois côtés adjacents à m. Les trois sommes de ces excès, en chaque sens x, y, z, divisées par le volume de l'élément et ajoutées aux composantes, aussi suivant x, y, z, des forces extérieures agissant sur l'unité de ce volume, donnent les trois équations d'équilibre. Et l'on en peut facilement ensuite déduire trois autres équations plus simples où figurent isolément les composantes des forces dans les sens x, y, z où se comptent les coordonnées curvilignes α, β, γ.

Comme le deuxième procédé, qui généralise et modifie un peu celui qu'a employé M. Lamé, sera sans doute ordinairement mis en usage pour ce qui regarde l'établissement des expressions des dilatations et glissements ∂_x, ∂_y,..., g_{xy} ou ∂_α, ∂_β,..., $g_{\alpha\beta}$ en fonction des dé-

placements U, V, W et de leurs dérivées en α, β, γ, il est bon d'en indiquer le détail ici.

Les points du corps étant d'abord rapportés à des axes rectangulaires fixes de coordonnées x, y, z, appelons, pour éviter toute confusion,

$$x',\ y',\ z'$$

ce que nous avons nommé jusqu'ici

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},$$

c'est-à-dire les directions, au point particulier m, des normales aux surfaces conjuguées du système pour lequel le corps non isotrope jouit de l'homogénéité. Et considérons, pour un moment, le point m comme l'origine de coordonnées rectilignes nouvelles fixes x', y', z' parallèles à ces directions, afin d'y rapporter, avant et après leurs petits déplacements, les seuls points qui sont à de petites distances autour de m; les formules ordinaires de transformation de coordonnées rectangles, en appelant

(*a*) $\mathrm{c}_{xx'}$, $\mathrm{c}_{xy'}, \ldots$ $\mathrm{c}_{zz'}$, les cosinus des angles de x avec x', avec y', etc.,

donneront

(*b*) $x,\ y,\ z =$ des fonctions connues de x', y', z' et de $\mathrm{c}_{xx'}$, etc.,

d'où, substituant

$$x+u,\ y+v,\ z+w,\quad \text{et}\quad x'+\mathrm{U},\ y'+\mathrm{V},\ z'+\mathrm{W}$$
$$\text{à}\quad x,\ y,\ z\quad \text{et}\quad x',\ y',\ z',$$

et retranchant x, y, z, ce qui revient à mettre dans ces formules u, v, w, U, V, W à la place de x, y, z, x', y', z',

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \mathrm{U}\mathrm{c}_{xx'} + \mathrm{V}\mathrm{c}_{xy'} + \mathrm{W}\mathrm{c}_{xz'},\\ v &= \mathrm{U}\mathrm{c}_{yx'} + \mathrm{V}\mathrm{c}_{yy'} + \mathrm{W}\mathrm{c}_{yz'},\\ w &= \mathrm{U}\mathrm{c}_{zx'} + \mathrm{V}\mathrm{c}_{zy'} + \mathrm{W}\mathrm{c}_{zz'};\end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$(d)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx}\,c_{xx'} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dx}\,c_{xy'} + \dfrac{d\mathrm{W}}{dx}\,c_{xz'}, \quad \dfrac{du}{dy} = \ldots, \quad \dfrac{dw}{dz} = \ldots, \\ \qquad \text{où } c_{xx'},\ c_{xy'},\ldots, \text{ sont fonctions des coordonnées nouvelles } \alpha,\ \beta,\ \gamma. \end{array}\right.$$

Mais on a, par la nature ou la définition de ces coordonnées curvilignes particulières,

$$(e)\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma = \text{des fonctions connues de } x,\ y,\ z;\ \text{et réciproquement.}$$

D'où

$$(f)\qquad \frac{d(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{d(x,\ y,\ z)} = \text{des fonctions connues de } \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

On en tire facilement, puisqu'on a

$$\frac{d.}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}\frac{d.}{d\alpha} + \frac{d\beta}{dx}\frac{d.}{d\beta} + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d.}{d\gamma}, \quad \frac{d.}{dy} = \ldots, \quad \frac{d.}{dz} = \ldots.$$

où le point symbolique remplace une fonction quelconque, les formules de changement de variable indépendante

$$(g)\qquad \frac{d.}{d(x,\ y,\ z)} = \text{des fonctions connues de } \frac{d.}{d(\alpha,\ \beta,\ \gamma)} \text{ et de } \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

En les appliquant à U, à V, à W, et en substituant ce qui en résulte dans les expressions (d) de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy},\ldots, \frac{dw}{dz}$, puis celles-ci dans les les expressions (4) des déformations ∂, g, on obtient pour celles-ci

$$(h)\quad \partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z,\ g_{yz},\ g_{zx},\ g_{xy} = \text{des fonctions connues de } \frac{d(\mathrm{U},\ \mathrm{V},\ \mathrm{W})}{d(\alpha,\ \beta,\ \gamma)} \text{ et de } \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Mais on connaît les formules suivantes de changement de direction des dilatations et glissements très-petits :

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial_{x'} = \partial_x c_{xx'}^2 + \partial_y c_{yx'}^2 + \partial_z c_{zx'}^2 + g_{yz} c_{yx'} c_{zx'} + g_{zx} c_{zx'} c_{xx'} + g_{xy} c_{xx'} c_{yx'}, \\ \partial_{y'} = \ldots, \qquad \partial_{z'} = \ldots, \\ g_{y'z'} = 2\partial_x c_{xy'} c_{xz'} + 2\partial_y c_{yy'} c_{yz'} + 2\partial_z c_{zy'} c_{zz'} + \\ \qquad + g_{yz}(c_{yy'} c_{zz'} + c_{zy'} c_{yz'}) + g_{zx}(c_{zy'} c_{xz'} + c_{xy'} c_{zz'}) + g_{xy}(c_{xy'} c_{yz'} + c_{yy'} c_{xz'}), \\ g_{z'x'} = \ldots, \qquad g_{x'y'} = \ldots, \end{array}\right.$$

susceptibles d'être tirées, pour des déplacements très-petits u, v, w, U, V, W, de la combinaison des formules (4) et (d), mais démontrables directement et simplement, quelles que soient les grandeurs absolues des déplacements, en se fondant sur ce que, lorsqu'on a deux résultantes de plusieurs lignes droites (comme sont les diagonales de parallélipipèdes par rapport à trois de leurs côtés), le produit de l'une des deux par la projection de l'autre sur sa direction est égal à la somme algébrique des produits des lignes composantes de la première par les diverses projections, sur leurs directions, des lignes composantes de la seconde [*].

Substituant les valeurs (h) des ∂_x, ∂_y,..., g_{xy} dans les seconds membres des formules (i); mettant, pour les neuf cosinus c, leurs valeurs en α, β, γ, et écrivant

$$(j)\qquad \left\{\begin{array}{l} \qquad\quad \partial_\alpha,\ \partial_\beta,\ \partial_\gamma,\ g_{\beta\gamma},\ g_{\gamma\alpha},\ g_{\alpha\beta},\\ \text{au lieu de } \partial_{x'},\ \partial_{y'},\ \partial_{z'},\ g_{y'z'},\ g_{z'x'},\ g_{x'y'},\end{array}\right.$$

vu que les coordonnées α, β, γ, même angulaires, prennent leurs accroissements quand les points qu'elles désignent cheminent précisément dans les sens des normales x', y', z' ou x, y, z, on obtient

$$(k)\ \partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma, g_{\beta\gamma}, g_{\gamma\alpha}, g_{\alpha\beta} = \text{des fonctions connues de } \frac{d(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})}{d(\alpha, \beta, \gamma)} \text{ et de } \alpha, \beta, \gamma,$$

c'est-à-dire les formules que l'on cherchait à établir.

Nous verrons comment la complication naturelle de ces calculs peut souvent être fort atténuée.

5. *Application à l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique; établissement préalable, d'une manière directe, des formules de l'élasticité pour les coordonnées relatives à ce genre d'homogénéité.* — Si l'on conçoit dans un corps une droite prise pour *axe*, un plan perpendiculaire pris pour *base* et un plan passant par cette droite pris pour *méridien fixe*, et si, avec M. Lamé, on adopte pour coordonnées d'un point quelconque m :

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1864, p. 289, note.

r son rayon vecteur ou la perpendiculaire élevée à l'axe et se terminant en ce point;

φ l'angle azimutal que ce rayon fait avec le méridien, pris d'un des deux côtés de l'axe;

z la distance de m à la base;

les surfaces coordonnées seront : 1° les cylindres à base circulaire ayant l'axe du système pour axe de figure; 2° les plans méridiens ou passant par cet axe; 3° les plans parallèles à la base.

En appelant :

U, V, W les projections du petit déplacement sur les normales respectives à ces surfaces;

∂_r, ∂_φ, ∂_z, $g_{\varphi z}$, g_{zr}, $g_{r\varphi}$ les dilatations et glissements dans les trois sens r, $r\varphi$, et z de ces mêmes normales;

p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$, p_{zz}, $p_{\varphi z}$, p_{zr}, $p_{r\varphi}$ les composantes, dans les mêmes directions, des pressions sur l'unité superficielle des petites faces qui leur sont perpendiculaires;

exprimons directement (premier procédé) les dilatations et glissements en fonction des déplacements et de leurs dérivées, et posons, aussi directement, les équations d'équilibre d'un élément de volume.

Si mn, mp, mq sont trois petites lignes tirées du point m dans les mêmes directions rectangulaires r, φ, z du rayon r, de l'élément de l'arc $r\varphi$, et de l'ordonnée z, et si des déplacements extrêmement petits les changent en m_1n_1, m_1p_1, m_1q_1, l'on a

$$\partial_r = \frac{m_1n_1 - mn}{mn}, \quad \partial_\varphi = \frac{m_1p_1 - mp}{mp}, \quad \partial_z = \frac{m_1q_1 - mq}{mq}.$$

Or, comme la direction de m_1n_1 est très-peu différente de celle de mn, sa longueur est égale à celle de sa projection orthogonale sur la direction de mn, à cela près d'une quantité très-petite d'ordre supérieur et négligeable; mais cette projection est égale à mn augmenté de l'excès de la valeur de U pour le point n sur la valeur de U pour le point m, c'est-à-dire est égale à $mn + \frac{dU}{dr}mn$. Donc $\partial_r = \frac{dU}{dr}$.

On trouvera de même $\partial_z = \frac{dW}{dz}$.

Quant à ce qui regarde ∂_φ, m_1p_1 est égal aussi à sa projection *ortho-*

gonale sur la direction de mp, c'est-à-dire sur la tangente au cercle de rayon r, ayant son plan perpendiculaire à l'axe, ou, ce qui revient au même, sur la circonférence même avec laquelle cette tangente se confond dans une petite étendue; mais si l'on projette polairement $m_1 p_1$ sur cette même circonférence, au moyen des deux rayons vecteurs de m_1 et de p_1, projetés eux-mêmes orthogonalement sur son plan, la projection polaire, ou le petit arc intercepté, sera $m_1 p_1$ diminué dans la proportion du déplacement U, dans le sens r, au rayon r, c'est-à-dire sera $m_1 p_1 \frac{U}{r}$, que l'on peut remplacer par $mp \frac{U}{r}$, vu la petitesse du rapport $\frac{U}{r}$. Or cette projection polaire sur l'arc est égale à $mp + \frac{dV}{rd\varphi} mp$; donc $m_1 p_1$, ou sa projection orthogonale sur la tangente, est égal à $mp + \frac{dV}{rd\varphi} mp + \frac{U}{r} mp$, et par conséquent on a

$$\partial_\varphi = \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}.$$

Venons aux glissements, qui sont les excès des angles droits pmq, qmn, nmp sur les angles légèrement aigus $p_1 m_1 q_1$, $q_1 m_1 n_1$, $n_1 m_1 p_1$, ou, ce qui revient au même, les cosinus de ces trois derniers angles. Le premier et le second, relatifs à des angles dont un des côtés primitifs était la ligne mq parallèle aux z, sont évidemment les mêmes que dans un système de coordonnées rectilignes r, $r\varphi$ (le petit arc ou sa tangente) et z. Ils ont donc pour grandeurs $\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{rd\varphi}$ et $\frac{dW}{dr} + \frac{dU}{dz}$.

Il en serait de même du troisième $g_{r\varphi} = nmp - n_1 m_1 p_1$, et, en appelant, comme ci-dessus, y' la direction d'une coordonnée suivant la tangente à l'arc $r\varphi$, ce glissement serait la somme des deux petites rotations $\frac{dU}{dy'}$, $\frac{dV}{dr}$ éprouvées en sens contraires par mn et par mp en devenant $m_1 n_1$, $m_1 p_1$, si cette tangente n'avait pas changé de direction; mais elle a tourné de $\frac{V}{r}$ en vertu du déplacement V de son point de contact. Cette petite rotation diminue d'autant celle de mn ou la quote-part $\frac{dU}{dy'} = \frac{dU}{rd\varphi}$ qu'elle apporte dans le rétrécissement de l'angle primitivement droit nmp. Donc $g_{r\varphi} = \frac{dU}{rd\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}$.

On a ainsi, en récapitulant,

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_r = \dfrac{dU}{dr}, & \partial_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{d\varphi} + \dfrac{U}{r}, \quad \partial_z = \dfrac{dW}{dz}, \\ g_{\varphi z} = \dfrac{dV}{dz} + \dfrac{dW}{rd\varphi}, & g_{zr} = \dfrac{dW}{dr} + \dfrac{dU}{dz}, \quad g_{r\varphi} = \dfrac{dU}{rd\varphi} + \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r}, \end{cases}$$

formules d'accord avec celles des six composantes de pression dans un cylindre de matière isotrope, auxquelles arrive M. Lamé en suivant la marche du second procédé ci-dessus (n° 4), excepté qu'à partir de l'établissement des formules de changement de variable (f) et de celle qui remplace (g) en donnant $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ en fonction de $\dfrac{d(U,V,W)}{d(r,\varphi,z)}$, l'illustre académicien fait les substitutions, non pas dans (i) du n° 5, mais dans les expressions de $p_{xx},\ldots, p_{xy}$, dont il déduit celles de $p_{rr},\ldots, p_{r\varphi}$ au moyen des six formules connues de changement de plan de pression dues à Cauchy, les cosinus qui y entrent étant

$$(7)\quad \begin{cases} c_{xx'} = \cos\varphi, & c_{yx'} = \sin\varphi, & c_{zx'} = 0; \\ c_{xy'} = -\sin\varphi, & c_{yy'} = \cos\varphi, & c_{zx'} = 0; \\ c_{xz'} = 0, & c_{yz'} = 0, & c_{zz'} = 1. \end{cases}$$

La substitution dans les formules (i) donnant $\partial_{x'}$ ou $\dfrac{dU}{dx'} =$ etc., indiquée au numéro précédent, m'a paru plus simple et plus adaptée aux cas d'homogénéité hétérotrope de tout genre dont nous nous occupons.

Au reste, on diminue considérablement la longueur des calculs qu'entraîne ce procédé analytique si l'on prend pour le plan méridien fixe, auquel on rapporte les points autour de m, celui qui passe par m, ou si l'on fait $\varphi = 0$, après avoir effectué les différentiations par rapport à cet angle, simplification dont on verra l'analogue au n° 9 pour les coordonnées sphériques, ce qui rendra abordables les calculs y relatifs.

Établissons aussi d'une manière directe (premier procédé) les équations d'équilibre d'un élément de volume compris entre deux surfaces cylindriques ayant pour axe celui du système, et distantes de Δr, deux plans méridiens, distants angulairement de $\Delta\varphi$, et deux plans parallèles à la base, distants de Δz.

Si, au lieu de placer l'un des angles de l'élément au point m, auquel se rapportent les coordonnées r, φ, z et les valeurs p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$, etc. des composantes, nous y mettons, pour plus d'exactitude et de symétrie, le centre de l'élément, c'est-à-dire l'intersection des trois surfaces coordonnées à égale distance de celles qui le limitent deux à deux, et si nous appelons

$$(8)\qquad A_r = r\Delta\varphi.\Delta z,\quad A_\varphi = \Delta r\Delta z,\quad A_z = \Delta r.r\Delta\varphi$$

les *faces moyennes* ou les parties de ces trois surfaces qui sont interceptées par celles de l'élément, et sont respectivement perpendiculaires à r, à $r\varphi$, à z, nous aurons

$$A_r p_{rr},\quad A_r p_{r\varphi},\ldots,\quad A_z p_{zz}$$

pour les composantes, suivant r, $r\varphi$, z, des pressions qui s'exercent à travers ces faces moyennes, d'où, par exemple,

$$A_r p_{rr} + \frac{d.A_r p_{rr}}{dr}\frac{\Delta r}{2}\quad \text{et}\quad -\left(A_r p_{rr} - \frac{d.A_r p_{rr}}{dr}\frac{\Delta r}{2}\right)$$

pour les composantes, dans le sens r, de celles qui ont lieu à travers les faces antérieure et postérieure de l'élément, situées respectivement aux distances $r+\frac{\Delta r}{2}$, $r-\frac{\Delta r}{2}$ de l'axe. Leur somme algébrique, qui doit seule figurer dans l'équation de l'équilibre de translation dans le sens r, se réduit à

$$\frac{d.A_r p_{rr}}{dr}\Delta r;$$

et une pareille réduction aura lieu dans les autres additions de composantes de même nom, prises sur deux faces opposées.

Mais il entrera des termes d'une autre forme dans deux des trois équations d'équilibre.

En effet, les faces méridiennes antérieure et postérieure de l'élément, distantes respectivement de $\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}$, $\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}$ du plan méridien fixe, ne sont pas parallèles à la face moyenne correspondante A_φ; elles font

avec elle des angles $\frac{\Delta\varphi}{2}$. Les composantes, suivant les rayons qui y aboutissent, des pressions sur ces faces, fourniront néanmoins, suivant la coordonnée r, un terme $\frac{d.\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi r}}{d\varphi}\Delta\varphi$, comme si elles étaient parallèles à cette coordonnée, car le cosinus d'un angle extrêmement petit ne diffère point de l'unité; mais les composantes qui sont normales à ces mêmes faces, du côté du dehors de l'élément, fourniront, à celles que l'on prend suivant r, deux forces $-\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi\varphi}\frac{\Delta\varphi}{2}$ de même sens; et, suivant la tangente à l'arc $r\varphi$, les premières composantes fourniront deux forces $\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi r}.\frac{\Delta\varphi}{2}$, qui seront aussi de même sens, précisément parce que ces composantes, agissant sur les faces A_φ antérieure et postérieure, tendent, l'une à éloigner, l'autre à rapprocher de l'axe, son point d'application.

Les trois sommes de composantes de pressions sur les six faces de l'élément, dans les sens de r, de $r\varphi$ et de z, sont ainsi

$$\frac{d.\mathrm{A}_r p_{rr}}{dr}\Delta r + \frac{d.\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi r}}{d\varphi}\Delta\varphi + \frac{d.\mathrm{A}_z p_{zr}}{dz}\Delta z - 2\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi\varphi}\frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\frac{d.\mathrm{A}_r p_{r\varphi}}{dr}\Delta r + \frac{d.\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi\varphi}}{d\varphi}\Delta\varphi + \frac{d.\mathrm{A}_z p_{z\varphi}}{dz}\Delta z + 2\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi r}\frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\frac{d.\mathrm{A}_r p_{rz}}{dr}\Delta r + \frac{d.\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi z}}{d\varphi}\Delta\varphi + \frac{d.\mathrm{A}_z p_{zz}}{dz}\Delta z.$$

On peut écrire A_φ, A_z hors des signes d, car les faces de l'élément qui leur répondent sont égales des deux côtés antérieur et postérieur. Il n'en est pas de même de A_r, qui varie proportionnellement à son rayon vecteur, en sorte qu'en effectuant la différentiation, chacun des termes où entre A_r en fournira deux. Mettant, pour ces trois superficies, leurs valeurs (8), et appelant

$$\mathrm{R},\quad \Phi,\quad \mathrm{Z}$$

les forces agissant, en m, dans le sens r, $r\varphi$, z sur l'unité de volume de la matière, on peut diviser tout par le volume de l'élément, qui est

$$\Delta r . r\Delta\varphi . \Delta z;$$

ce qui donne, pour les trois équations générales d'équilibre,

$$
(9)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dp_{rr}}{dr}+\frac{dp_{r\varphi}}{rd\varphi}+\frac{dp_{zr}}{dz}+\frac{p_{rr}-p_{\varphi\varphi}}{r}+\mathrm{R}=0,\\
&\frac{dp_{r\varphi}}{dr}+\frac{dp_{\varphi\varphi}}{rd\varphi}+\frac{dp_{\varphi z}}{dz}+\frac{2p_{r\varphi}}{r}+\Phi=0,\\
&\frac{dp_{zr}}{dr}+\frac{dp_{\varphi z}}{rd\varphi}+\frac{dp_{zz}}{dz}+\frac{p_{zr}}{r}+\mathrm{Z}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Elles sont identiques avec celles que donne M. Lamé [*] après avoir obtenu, avec la troisième, deux autres équations plus compliquées exprimant l'équilibre, non dans les sens r et $r\varphi$, mais dans ceux de deux coordonnées rectilignes fixes x, y, au moyen du procédé mixte mentionné au numéro précédent.

6. *Caractère analytique de l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique.* — La matière d'un corps jouira, de la manière la plus générale, de ce genre d'homogénéité autour d'un axe z lorsqu'en mettant, dans les formules (1) des six composantes de pression,

$$
\left\{
\begin{array}{llllll}
\text{les expressions (6)} & \partial_r=\dfrac{d\mathrm{U}}{dr}, & \partial_\varphi=\text{etc.}, & & g_{\varphi z}=\dfrac{d\mathrm{V}}{dz}+\dfrac{d\mathrm{W}}{rd\varphi}, & \text{etc.},\\
\text{à la place de} & \partial_x, & \partial_y, & \text{etc.}, & g_{yz}, & \text{etc.},\\
\text{avec} & p_{\varphi\varphi}, & p_{\psi\psi}, & \text{etc.}, & p_{\varphi z}, & \text{etc.},\\
\text{pour} & p_{xx}, & p_{yy}, & \text{etc.}, & p_{yz}, & \text{etc.},
\end{array}
\right.
$$

lorsque, dis-je, elles seront satisfaites en tous les points, ou, ce qui revient au même, lorsque de petits déplacements U, V, W y engendreront des pressions dont les grandeurs soient données par ces formules *avec les coefficients* a *les mêmes partout*.

Il y aura symétrie de contexture en chaque point par rapport aux surfaces coordonnées si les vingt et un ou quinze coefficients des expressions (1) se réduisent aux neuf ou six des expressions (2), c'est-à-

[*] *Leçons*, 1852, § 77, équations (5).

dire si l'on a partout

$$(10)\left\{\begin{aligned} p_{rr} &= \mathrm{a}\frac{dU}{dr} + \mathrm{f}'\left(\frac{dV}{rd\varphi} + \frac{U}{r}\right) + \mathrm{e}'\frac{dW}{dz}, & p_{\varphi z} &= \mathrm{d}\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{rd\varphi}\right),\\ p_{\varphi\varphi} &= \mathrm{f}'\frac{dU}{dr} + \mathrm{b}\left(\frac{dV}{rd\varphi} + \frac{U}{r}\right) + \mathrm{d}'\frac{dW}{dz}, \quad \text{et} & p_{zr} &= \mathrm{e}\left(\frac{dW}{dr} + \frac{dU}{dz}\right),\\ p_{zz} &= \mathrm{e}'\frac{dU}{dr} + \mathrm{d}'\left(\frac{dV}{rd\varphi} + \frac{U}{r}\right) + \mathrm{c}\,\frac{dW}{dW}; & p_{r\varphi} &= \mathrm{f}\left(\frac{dU}{rd\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right). \end{aligned}\right.$$

7. *Cylindre creux.* — Supposons que ce cylindre ou tuyau ait les rayons

$$r_0 \text{ à l'intérieur,} \qquad r_1 \text{ à l'extérieur,}$$

et jouisse de l'homogénéité ainsi que de la symétrie de contexture définies par les équations (10); qu'il ait ses parois soumises à des pressions normales constantes

$$-p_0 \text{ intérieurement,} \qquad -p_1 \text{ extérieurement,}$$

et qu'il soit fermé aux deux bouts par des fonds ou couvercles plans ou courbes. Ces fonds sont supposés soumis aux mêmes pressions, et *ajustés de telle manière,* comme dit M. Lamé, que les tractions parallèles à l'axe n'altèrent pas la forme plane des diverses sections transversales du tuyau, c'est-à-dire qu'elles produisent, en tous les points de chacune des sections, le même déplacement longitudinal W. Cette condition sera exprimée plus loin (nº **12**); elle est d'ailleurs toujours remplie sensiblement, avec des couvercles quelconques, si le tuyau est très-long et si l'on ne considère pas des points trop proches de ses extrémités.

Vu la symétrie de contexture et la normalité des pressions aux parois, les déplacements des points ne pourront s'opérer que dans les plans méridiens, et seront les mêmes aux mêmes distances r de l'axe; en sorte qu'on aura

$$(11) \qquad \frac{dU}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0, \quad V = 0, \quad \frac{dW}{dr} = 0, \quad \frac{dW}{d\varphi} = 0;$$

d'où, formules (10),

$$(12)\quad \begin{cases} p_{rr} = \mathrm{a}\dfrac{d\mathrm{U}}{dr} + \mathrm{f}'\dfrac{\mathrm{U}}{r} + \mathrm{e}'\dfrac{d\mathrm{W}}{dz}, \quad p_{\varphi\varphi} = \mathrm{f}'\dfrac{d\mathrm{U}}{dr} + \mathrm{b}\dfrac{\mathrm{U}}{r} + \mathrm{d}'\dfrac{d\mathrm{W}}{dz}, \quad p_{zz} = \mathrm{e}'\dfrac{d\mathrm{U}}{dr} + \mathrm{d}'\dfrac{\mathrm{U}}{r} + \mathrm{c}\dfrac{d\mathrm{W}}{dz}. \\ p_{\varphi z} = 0, \quad p_{zr} = 0, \quad p_{r\varphi} = 0. \end{cases}$$

La seconde des équations d'équilibre (9), en faisant abstraction des forces exterieures telles que la pesanteur, se trouve identiquement vérifiée; la troisième (comme le remarque M. Lamé) se réduit à

$$\frac{dp_{zz}}{dz} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2\mathrm{W}}{dz^2} = 0;$$

d'où, γ étant une constante,

$$(13)\qquad \frac{d\mathrm{W}}{dz} = \partial_z = \gamma, \qquad \mathrm{W} = \gamma z.$$

Enfin la première de ces équations (10), qui se réduit à

$$(14)\qquad \frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{r} = 0,$$

prend la forme

$$(15)\qquad \mathrm{a}\frac{d^2\mathrm{U}}{dr^2} + \frac{\mathrm{a}}{r}\frac{d\mathrm{U}}{dr} - \mathrm{b}\frac{\mathrm{U}}{r^2} + \frac{\mathrm{e}' - \mathrm{d}'}{\gamma}\cdot\frac{1}{r} = 0.$$

On l'intègre en la changeant d'abord, par $\mathrm{U} = ry$ (y étant une nouvelle inconnue), en

$$(16)\qquad r^2\frac{d^2y}{dr^2} + 3r\frac{dy}{dr} + \frac{\mathrm{a} - \mathrm{b}}{\mathrm{a}}y + \frac{\mathrm{e}' - \mathrm{d}'}{\mathrm{a}}\gamma = 0,$$

puis en posant, pour faire disparaître le dernier terme,

$$y + \frac{\mathrm{e}' - \mathrm{d}'}{\mathrm{a} - \mathrm{b}}\gamma = y',$$

ce qui la réduit à

$$(17)\qquad r^2\frac{d^2y'}{dr^2} + 3r\frac{dy'}{dr} + \left(1 - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)y' = 0.$$

Celle-ci est homogène entre les variables y', r et leurs différentielles du premier et du second ordre. On ramène, comme on sait, une équation de ce genre à une du premier ordre entre deux nouvelles variables u, p, en y faisant $y' = ur$, $\frac{dy'}{dr} = p$, $\frac{d^2y'}{dr^2} = \frac{q}{r}$, ce qui donne de suite, en divisant par r, une expression $q = f(p, u)$, expression que l'on substitue dans l'équation $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{q}$, obtenue en égalant les deux valeurs de $\frac{dr}{r}$, tirées l'une de $pdr = d(ur)$, l'autre de $\frac{q}{r} = \frac{dp}{dr}$. Puis on sépare les variables de $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{f(p, u)}$ en faisant $p = tu$, qui donne à la fonction homogène $f(p, u)$ la forme $u\mathrm{F}(t)$, d'où l'on déduit l'équation, intégrable par quadratures,

$$\frac{du}{u} = \frac{t-1}{\mathrm{F}(t) - t(t-1)}\,dt. \tag{18}$$

Mais, dans le cas actuel, comme dans tous ceux où cette dernière équation intégrée fournit une expression trop implicite, on ne peut pas songer à en tirer $t = pu$ en u pour le substituer dans $\frac{dr}{r} = \frac{du}{p-u}$, de manière à pouvoir opérer une deuxième intégration après y avoir remis $\frac{y'}{r}$ pour u et $\frac{r}{y'}\frac{dy'}{dr}$ pour t.

On lève heureusement cette difficulté en divisant par $t - 1$ l'équation différentielle, ce qui, vu $\frac{du}{p-u} = \frac{dr}{r}$, en donne une seconde

$$\frac{dr}{r} = \frac{dt}{\mathrm{F}(t) - t(t-1)}. \tag{19}$$

En sorte qu'on n'a plus qu'à éliminer la variable auxiliaire t entre son intégrale et celle de la précédente (18) pour avoir, avec deux constantes, la relation cherchée entre r et $u = \frac{y'}{r}$.

Appliquée à l'équation (17), écrite sous la forme

$$r^2\frac{d^2y'}{dr^2} + (1 + 2m)\,r\frac{dy'}{dr} + (m^2 - n^2)\,y' = 0, \tag{20}$$

cette méthode, avec cet artifice, donne

$$\frac{du}{u} + \frac{t-1}{(t+m)^2 - n^2}\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{r} + \frac{dt}{(t+m)^2 - n^2} = 0;$$

d'où, C_1 et C_2 étant deux constantes, et en passant des logarithmes aux nombres

$$\frac{(t+m-n)^{\frac{m+1-n}{2n}}}{(t+m+n)^{\frac{m+1+n}{2n}}} = C_1 u, \quad \frac{t+m-n}{t+m+n}\,r^{2n} = C_2.$$

De la seconde de ces deux intégrales, on tire $t + m = n\,\frac{r^{2n} + C_2}{r^{2n} - C_2}$ qui, substituée dans la première, donne, en remettant $\frac{y'}{r}$ pour u, C et C′ étant d'autres constantes arbitraires,

$$(21) \qquad y' = C r^{n-m} + C' r^{-n-m}.$$

D'où, pour l'intégrale cherchée de (17),

$$(22) \qquad y' = C r^{-1+\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} + C' r^{-1-\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}}.$$

On a donc, pour les déplacements, vu ce que représentent y et y',

$$(23) \qquad \begin{cases} U = C r^{\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} + C' r^{-\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} + \frac{\mathfrak{d}' - \mathfrak{e}'}{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}\,\gamma r, \\ V = 0, \quad W = \gamma z; \end{cases}$$

et, pour les dilatations (6) et les pressions (12),

$$(24) \qquad \begin{cases} \partial_r = \frac{dU}{dr} = \sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\, C r^{-1+\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} - \sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\, C' r^{-1-\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} + \frac{\mathfrak{d}' - \mathfrak{e}'}{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}\,\gamma, \\ \partial_\varphi = \frac{U}{r} = C r^{-1+\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} + C' r^{-1-\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}} + \frac{\mathfrak{d}' - \mathfrak{e}'}{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}\,\gamma, \\ \partial_z = \frac{dW}{dz} = \gamma; \end{cases}$$

$$(25)\begin{cases} p_{rr} = \mathrm{C}(\sqrt{\mathrm{ab}}+\mathrm{f}')\,r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} - \mathrm{C}'(\sqrt{\mathrm{ab}}-\mathrm{f}')\,r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}' - (\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma, \\ p_{\varphi\varphi} = \mathrm{C}\left(\mathrm{b}+\mathrm{f}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \mathrm{C}'\left(\mathrm{b}-\mathrm{f}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}' - (\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma, \\ p_{zz} = \mathrm{C}\left(\mathrm{d}'+\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \mathrm{C}'\left(\mathrm{d}'-\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \left(\dfrac{\mathrm{d}'^2-\mathrm{e}'^2}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+\mathrm{c}\right)\gamma. \end{cases}$$

On voit, quand les élasticités b et a, ou d′ et e′, sont inégales, que la traction longitudinale p_{zz} n'est pas constante, bien que la dilatation ∂_z le soit. Cette traction varie alors avec la distance r à l'axe, comme font toujours p_{rr} et $p_{\varphi\varphi}$, ainsi que les dilatations normale et tangentielle ∂_r, ∂_φ.

Les constantes C, C′, γ doivent être déterminées par les conditions à remplir aux surfaces, à savoir :

$$(26)\qquad \begin{cases} \text{qu'on ait} \quad p_{rr} = -p_0 \quad \text{pour} \quad r = r_0, \\ \phantom{\text{qu'on ait}} \quad p_{rr} = -p_1 \quad \text{pour} \quad r = r_1; \end{cases}$$

et que les tractions p_{zz} s'exerçant longitudinalement dans l'étendue de l'épaisseur $r_1 - r_0$, sur toutes les couronnes élémentaires $2\pi r dr$ de la section transversale, fassent équilibre à la différence des pressions $-p_0$, $-p_1$, s'exerçant sur chaque couvercle à l'intérieur et à l'extérieur, c'est-à-dire qu'on ait

$$(27)\qquad p_0\pi r_0^2 - p_1\pi r_1^2 = 2\pi\int_{r_0}^{r_1} p_{zz}\, r dr.$$

Il en résulte

$$(28)\begin{cases} (\sqrt{\mathrm{ab}}+\mathrm{f}')\,r_0^{-1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\,\mathrm{C} - (\sqrt{\mathrm{ab}}-\mathrm{f}')\,r_0^{-1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\,\mathrm{C}' + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}' - (\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma = -p_0, \\ (\sqrt{\mathrm{ab}}+\mathrm{f}')\,r_1^{-1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\,\mathrm{C} - (\sqrt{\mathrm{ab}}-\mathrm{f}')\,r_1^{-1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\,\mathrm{C}' + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}' - (\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma = -p_1, \\ 2\left(\mathrm{d}'+\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right)\dfrac{r_1^{1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}} - r_0^{1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}}{1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\,\mathrm{C} + 2\left(\mathrm{d}'-\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right)\dfrac{r_1^{1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}} - r_0^{1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}}{1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\,\mathrm{C}' \\ \qquad + \left(\dfrac{\mathrm{d}'^2-\mathrm{e}'^2}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+\mathrm{c}\right)(r_1^2-r_0^2)\,\gamma = p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2, \end{cases}$$

équations du premier degré, d'où l'on tirera les valeurs de C, C' et $\gamma = \partial_z$, à mettre dans (23), (24), (25), et que l'on mettra aussi, si l'on veut avoir la proportion de l'augmentation de la capacité intérieure ou du volume de l'espace vide, dans l'expression de $2\partial_\varphi + \gamma$ pour $r = r_0$, qui est, U_0 exprimant U pour cette valeur de r,

$$(29)\quad 2\frac{U_0}{r_0} + \gamma = 2Cr_0^{-1+\sqrt{\frac{b}{a}}} + 2C'r_0^{-1-\sqrt{\frac{b}{a}}} + \left(2\frac{d'-e'}{a-b} + 1\right)\gamma.$$

Les équations du premier degré (28) en C, C', γ se simplifient lorsqu'on suppose très-mince l'enveloppe cylindrique. Soient alors

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon \text{ l'épaisseur} = r_1 - r_0, \quad \mathrm{r} \text{ le rayon moyen} = \frac{r_0 + r_1}{2}, \quad \sqrt{\frac{b}{a}} = n, \\ &\text{d'où} \quad r_1^i = \mathrm{r}^i + \frac{i\varepsilon}{2}\mathrm{r}^{i-1}, \quad r_0^i = \mathrm{r}^i - \frac{i\varepsilon}{2}\mathrm{r}^{i-1}; \end{aligned}\right.$$

ces équations se réduisent, en ajoutant ensemble les deux premières, puis en les retranchant l'une de l'autre, à

$$(30)\left\{\begin{aligned} &(na + f')\mathrm{r}^{n-1}C - (na - f')\mathrm{r}^{-n-1}C' + \frac{(a+f')d' - (b+f')e'}{a-b}\gamma = -\frac{p_0 + p_1}{2}, \\ &(n-1)(na + f')\mathrm{r}^{n-2}C + (n+1)(na - f')\mathrm{r}^{-n-2}C' = \frac{p_0 - p_1}{\varepsilon}, \\ &(d' + ne')\mathrm{r}^n C + (d' - ne')\mathrm{r}^{-n}C' + \left(\frac{d'^2 - e'^2}{a-b} + c\right)\mathrm{r}\gamma = \frac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}^2}{2\varepsilon} - \frac{(p_0 + p_1)\mathrm{r}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Résolvant et substituant dans (25), (24) en négligeant ε^2, on obtient d'abord, toutes réductions faites, l'expression simple

$$(31)\qquad p_{\varphi\varphi} = \frac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}}{\varepsilon}.$$

Elle revient, sauf ce qui résulte de la pression atmosphérique extérieure p_1, à celle qui a été donnée depuis longtemps par Mariotte [*] pour la traction *tangentielle* $p_{\varphi\varphi}\varepsilon$ de l'unité de longueur de la paroi d'un tuyau de conduite d'eau; expression qui est, comme on sait, facile à

[*] *Traité du mouvement des eaux*, Ve partie, 2e discours.

démontrer. Puis on trouve, pour les dilatations tangentielle et longitudinale, qui sont plus essentielles à connaître que les tractions lorsque l'on veut exprimer les conditions de résistance,

$$(32)\quad \begin{cases} \partial_\varphi = \dfrac{U}{r} = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{2ac - ad' + e'f' - 2e'^2}{abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f'} \cdot \dfrac{(p_0 - p_1)\,r}{\varepsilon}, \\ \partial_z = \gamma = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{ab - 2ad' + 2e'f' - f'^2}{abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f'} \cdot \dfrac{(p_0 - p_1)\,r}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Quand les rayons r sont des axes de symétrie de contexture, c'est-à-dire quand on a (n° 5)

$$b = c = 2d + d' \quad \text{ou} \quad = 3d, \quad e' = f',$$

les expressions de C, C′, γ à tirer de (28) pour des valeurs quelconques de l'épaisseur $r_1 - r_0$ ne se simplifient presque pas.

Mais elles se simplifient beaucoup si les axes de symétrie en chaque point sont les lignes parallèles à l'axe du tuyau, ou si, seulement, l'élasticité est la même dans le sens du rayon vecteur et dans le sens de la tangente à son cercle, ce qui aura lieu ordinairement pour les pièces forées; en sorte que

$$d' = e', \quad a = b, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = 1.$$

Alors une partie des termes des formules (23), (24), (25), (28) prend la forme $\frac{0}{0}$.

On peut éviter cette indétermination en faisant d'abord $d' = e'$, ce qui annule le dernier terme de la valeur (23) de U, qui, ensuite, en faisant $a = b$, se réduit à

$$U = Cr + \frac{C'}{r}.$$

La même chose se trouve en faisant $b = a$ en premier lieu, mais après avoir remplacé C par une autre constante $C_1 - \dfrac{d' - e'}{a - b}\gamma$, d'où

$$U = C_1 r^{\sqrt{\frac{b}{a}}} + C' r^{-\sqrt{\frac{b}{a}}} + (d' - e')\,\gamma\, \frac{r - r^{\sqrt{\frac{b}{a}}}}{a - b},$$

qui, par $b = a$, devient

$$U = C_1 r + \frac{C'}{r} + \frac{d' - e'}{2a} \gamma . r \log r.$$

Cette intégrale de l'équation (15), pour le cas $b = a$, se réduit à ses deux premiers termes lorsqu'on a aussi $d' = e'$.

Mais on obtient la même chose en remontant à l'équation différentielle (16) elle-même; car, par $d' = e'$, $a = b$, elle se réduit à

$$(33) \qquad r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + 3r \frac{dy}{dr} = 0.$$

Et comme le premier membre, multiplié par r, est la dérivée de $r^3 \frac{dy}{dr}$, on a, $-2C'_1$ et C_1 étant des constantes,

$$r^3 \frac{dy}{dr} = -2C'_1, \quad \frac{dy}{dr} = -2C'_1 r^{-3}, \quad y = -2C'_1 \frac{r^{-2}}{-2} + C_1,$$

ou

$$(34) \qquad U = C_1 r + \frac{C'_1}{r}.$$

On en déduit

$$(35) \qquad \begin{cases} p_{rr} = a\left(C_1 - \frac{C'_1}{r^2}\right) + f'\left(C_1 + \frac{C'_1}{r^2}\right) + d'\gamma, \\ p_{\varphi\varphi} = f'\left(C_1 - \frac{C'_1}{r^2}\right) + a\left(C_1 + \frac{C'_1}{r^2}\right) + d'\gamma, \\ p_{zz} = 2d'C_1 + c\gamma; \end{cases}$$

$$(36) \qquad \begin{cases} -p_0 = (a + f')C_1 - \frac{a - f'}{r_0^2} C'_1 + d'\gamma, \\ -p_1 = (a + f')C_1 - \frac{a - f'}{r_1^2} C'_1 + d'\gamma, \\ p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2 = (2d'C_1 + c\gamma)(r_1^2 - r_0^2); \end{cases}$$

dont on tire, quelle que soit l'épaisseur $r_1 - r_0$,

$$(37) \qquad \begin{cases} \gamma = \frac{a + f' - 2d'}{c(a + f') - 2d'^2} \cdot \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \\ C'_1 = \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{(a - f')(r_1^2 - r_0^2)}, \quad C_1 = \frac{c - e'}{c(a + f') - 2d'^2} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}; \end{cases}$$

d'où

$$(38)\qquad U = \frac{c - e'}{c(a + f') - 2c'^2}\,\frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\, r + \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{(a - f')(r_1^2 - r_0^2)}\cdot\frac{1}{r}.$$

Les formules sont aussi simples, dans ce cas de contexture hétérotrope semi-polairement homogène, que dans le cas d'isotropie.

Elles se réduisent, dans ce dernier cas, pour lequel

$$a = c = 2f + f',\quad e' = f',$$

aux formules trouvées en 1828 par MM. Lamé et Clapeyron [*] et appliquées par M. Lamé à la détermination des augmentations de capacité des piézomètres cylindriques qui ont été employés par M. Regnault dans ses belles expériences sur la compressibilité des liquides [**].

En mettant pour U sa valeur (38) dans (6)

$$\partial_\varphi = \frac{U}{r},$$

on voit que les proportions des dilatations tangentielles des couches cylindriques de l'enveloppe solide diminuent sensiblement à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. Celle de la paroi intérieure atteint presque le *double* de celle de la paroi extérieure quand l'épaisseur $r_1 - r_0$ est le sixième du diamètre extérieur $2r_1$, si la matière est isotrope.

On voit au reste, par notre analyse, que lorsque la matière des piézomètres cylindriques (la même chose pourra se conclure ci-après pour les piézomètres sphériques), au lieu d'être isotrope, n'est qu'homogène, les expressions des dilatations peuvent différer non-seulement par la valeur des constantes, mais, même, *par la forme*, des expressions relatives au cas rare d'isotropie. Cela explique suffisamment les différences qui ont pu être trouvées entre les résultats de diverses

---

[*] *Voyez* aussi *Leçons sur l'élasticité* de M. Lamé.

[**] *Relation des expériences, etc.* — *Voyez* aussi la nouvelle édition (1864) des *Leçons de Navier*, Appendice V, §§ 57 et 58.

expériences et ceux qu'on tirait des formules d'isotropie à un seul paramètre, de Navier, Poisson, etc. Il ne faut donc point conclure, de pareilles différences, que celles-ci soient défectueuses et qu'il faille y introduire deux paramètres dont le rapport varie avec la nature chimique de la substance isotrope, contrairement à ce qui résulte de la loi moléculaire dans ce qu'elle a de commun à toutes, et qu'il faut toujours invoquer. Les formules d'hétérotropie ci-dessus offrent, sans rien d'illogique, des paramètres en nombre encore plus grand, pour expliquer tous les résultats que l'expérience présente.

Voyons ce que deviennent les formules (23) à (25) du cas général d'élasticité inégale dans les trois sens lorsqu'on prend, pour les pressions, les formules (3) de distribution *ellipsoïdale* des élasticités directes, à trois paramètres d, e, f, expressions qui conviennent, avons-nous dit, pour les corps à cristallisation confuse, comme sont tous les matériaux de construction; c'est-à-dire lorsque l'on a, en effaçant les accents,

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{a} = 3\,\frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}},\quad \mathrm{b} = 3\,\frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}},\quad \mathrm{c} = 3\,\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}},\\ &\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}} = n, \end{aligned}\right.$$

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{rr} &= 3\,\frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}\,\partial_r + \mathrm{f}\,\partial_\varphi + \mathrm{e}\,\partial_z,\\ p_{\varphi\varphi} &= \mathrm{f}\,\partial_r + 3\,\frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}\,\partial_\varphi + \mathrm{d}\,\partial_z,\\ p_{zz} &= \mathrm{e}\,\partial_r + \mathrm{d}\,\partial_\varphi + 3\,\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}\,\partial_z, \end{aligned}\right.$$

Les expressions et équations générales (30), (32) se réduisent à

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{U} = \mathrm{C}\,r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}} + \mathrm{C}'\,r^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}} - \frac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)}\,\gamma r,\\ &\mathrm{V} = 0,\quad \mathrm{W} = \gamma z; \end{aligned}\right.$$

$$(42)\quad \begin{cases} p_{rr} = 4\mathrm{f}\,\mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} - 2\mathrm{f}\,\mathrm{C}' r^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + \dfrac{2\mathrm{d}}{3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)}\gamma, \\[2ex] p_{\varphi\varphi} = 4\mathrm{f}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}\,\mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + 2\mathrm{f}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}\,\mathrm{C}' r^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + \dfrac{2\mathrm{d}}{3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)}\gamma, \\[2ex] p_{zz} = 2\mathrm{d}\,\mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + \dfrac{8}{3}\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}\gamma; \end{cases}$$

$$(43)\quad \begin{cases} 2r_0^{n-1}\mathrm{C} - r_0^{-n-1}\mathrm{C}' + \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}}\gamma = -\dfrac{p_0}{2\mathrm{f}}, \\[2ex] 2r_1^{n-1}\mathrm{C} - r_1^{-n-1}\mathrm{C}' + \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}}\gamma = -\dfrac{p_1}{2\mathrm{f}}, \\[2ex] \dfrac{r_1^{n+1} - r_0^{n+2}}{n+1}\mathrm{C} + \dfrac{2\mathrm{d}}{3n\mathrm{f}}(r_1^2 - r_0^2)\gamma = \dfrac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{4\mathrm{d}}. \end{cases}$$

On tire, de celles-ci, les suivantes

$$(44)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{3(n+1)}{2\mathrm{d}}\,\dfrac{(r_1^{n+1} - r_0^{n+1})(p_0 r_0^{n+1} - p_1 r_1^{n+1}) - (n+1)\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{d}}(r_1^{2n} - r_0^{2n})}{(r_1^{n+1} - r_0^{n+1})^2 - 4\frac{(n+1)^2}{n}(r_1^2 - r_0^2)(r_1^{2n} - r_0^{2n})}, \\[2ex] \mathrm{C} = \dfrac{n+1}{r_1^{n+1} - r_0^{n+1}}\left(\dfrac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{4\mathrm{d}} - 2\mathrm{d}\dfrac{r_1^2 - r_0^2}{3n\mathrm{f}}\gamma\right), \\[2ex] \mathrm{C}' = 2r_0^{2n}\mathrm{C} + r_0^{n+1}\left(\dfrac{p_0}{2\mathrm{f}} + \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}}\gamma\right), \end{cases}$$

qui se simplifient en effaçant p_1, ordinairement la pression de l'atmosphère; et qui se réduisent, quand l'enveloppe est mince ou quand r_1 et $r_0 = \mathrm{r} \pm$ la très-petite demi-épaisseur $\frac{1}{2}\varepsilon$, à

$$(45)\quad \begin{cases} \mathrm{C} = \dfrac{8\mathrm{e} - \mathrm{f}}{60\mathrm{fd}}\,\dfrac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}^{2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}}}{\varepsilon}, \quad \mathrm{C}' = \dfrac{7\mathrm{d} + 8\mathrm{e} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}} - 1\right)\mathrm{f}}{30\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)\mathrm{f}}\,\dfrac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}^{2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}}}{\varepsilon}, \\[2ex] \gamma = \partial_z = \dfrac{2\mathrm{f} - \mathrm{e}}{10\mathrm{de}}\,\dfrac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}}{\varepsilon}, \quad \partial_\varphi = \dfrac{\mathrm{U}}{r} = \dfrac{8\mathrm{e} - \mathrm{f}}{20\mathrm{fd}}\,\dfrac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Bien que ces formules aient été tirées de celles (23) à (28), elles ne

donnent plus de $\frac{0}{0}$ lorsqu'on y suppose que $n = 1$ ou $d = e$, $a = b$, ou lorsque les rayons r sont des axes de symétrie. En effet, les relations ellipsoïdales $a = 3\frac{ef}{d}$, $b = 3\frac{fd}{e}$, $c = 3\frac{de}{f}$ mettent en évidence et permettent de supprimer un facteur commun aux deux termes de fonctions telles que $\frac{d-e}{a-b}$. Avec ce mode de distribution des élasticités généralement inégales en trois sens, on n'a donc pas besoin de recommencer l'intégration quand on vient ensuite à supposer égale élasticité en deux des sens.

8. *Dilatations d'un cylindre creux hétérotrope exprimées en fonction des modules d'élasticité de traction en divers sens.* — Les élasticités *latérales* d', e', f' sont difficiles à mesurer, même par des expériences de torsion, en admettant avec nous leur égalité aux élasticités tangentielles d, e, f (n° 2); car, exécutées sur le cylindre entier, ces expériences ne peuvent donner que la première d. Le mesurage direct des élasticités dites *directes* a, b, c est à peu près impossible.

Mais, comme on sait, l'on mesure facilement, tant sur une pièce entière que sur de petits prismes qu'on en extrait en plusieurs sens, pourvu qu'ils aient une certaine longueur, les *modules d'élasticité de traction* de Young et Navier, ou les rapports de la traction longitudinale qu'on y exerce, à l'allongement qu'elle produit par unité de longueur. Appelons

$$E_x \text{ ou } E_r, \quad E_y \text{ ou } E_\varphi, \quad E_z$$

les modules d'élasticité de prismes extraits dans les trois sens que les sous-lettres indiquent. Les trois premières formules de composantes (2), en faisant $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$ pour exprimer qu'il n'y a aucune pression sur les faces latérales d'un petit prisme dont les arêtes sont parallèles aux x, et en éliminant les contractions latérales ∂_x, ∂_z, donnent la valeur de $E_x = \frac{p_{xx}}{\partial_x}$; et comme on obtient de la même manière les modules des deux autres sens, l'on a

$$(46)\quad E_x = \frac{abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f'}{bc - d'^2}, \quad E_y = \frac{\text{même num}^r}{ca - e'^2}, \quad E_z = \frac{\text{même num}^r}{ab - f'^2}.$$

On ne peut pas, comme on voit, exprimer les six coefficients a, b,..., f′ entrant dans les formules (2) ou dans celles (23) à (28) du cylindre creux, au moyen de ces trois modules d'élasticité de traction; il faudrait, pour y arriver, poser trois autres équations, en mesurant encore trois modules sur des prismes extraits dans des directions obliques à x, y, z ou à r, $r\varphi$, z, par exemple dans les directions bissectrices des trois angles yz, zx, xy.

Mais toutes les formules d'élasticité symétrique en chaque point par rapport à trois plans, et par conséquent, comme nous avons dit (n° 5), toutes celles qui sont relatives aux matériaux et autres solides amorphes ou à pâte cristalline confuse, peuvent être exprimées au moyen de trois modules de traction seulement, si l'on admet avec nous la distribution ellipsoïdale des élasticités directes autour de chaque point (même n° 5), car

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &a = 3\,\frac{ef}{d},\ b = 3\,\frac{fd}{e},\ c = 3\,\frac{de}{f}, \text{ ou } 3d = \sqrt{bc},\ 3e = \sqrt{ca},\ 3f = \sqrt{ab},\\ &\text{donnent } E_x = \frac{20\,def}{8d^2} = \frac{5}{2}\,\frac{ef}{d} = \frac{5}{6}\,a,\ E_y = \frac{5}{2}\,\frac{fd}{e} = \frac{5}{6}\,b,\ E_z = \frac{5}{2}\,\frac{de}{f} = \frac{5}{6}\,c. \end{aligned}\right.$$

En faisant donc, dans les formules (41) à (45),

$$(48)\quad d = \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_z},\quad e = \frac{2}{5}\sqrt{E_z E_r},\quad f = \frac{2}{5}\sqrt{E_r E_\varphi},\quad n = \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}},$$

tout se trouvera exprimé en fonction de trois modules de traction E.

On aura, par exemple [expressions (41), (42)], pour le cylindre creux d'une épaisseur quelconque,

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &U = Cr^{\sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}} + C'r^{-\sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{E_z}}{\sqrt{E_r} + \sqrt{E_\varphi}},\\ &p_{\varphi\varphi} = \frac{8}{5}\,E_\varphi C r^{\sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}-1} + \frac{4}{5}\,E_\varphi C' r^{-\sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}-1} + \frac{4}{15}\,\frac{\sqrt{E_r E_\varphi E_z}}{\sqrt{E_r} + \sqrt{E_\varphi}}\,\gamma \text{ [*]}. \end{aligned}\right.$$

---

[*] Les formules (30) à (35) ci-dessus, dont se déduisent toutes les suivantes, reviennent à celles qu'on voit à l'extrait de mon Mémoire du 21 mai 1860, publié aux

Et, pour un cylindre mince [expressions (45)],

$$(50)\quad \partial_z = \gamma = \frac{1}{4}\,\frac{2\sqrt{E_\varphi} - \sqrt{E_z}}{E_z\sqrt{E_\varphi}}\,\frac{p_0 - p_1}{\varepsilon}\,r,\qquad \partial_\varphi = \frac{1}{8}\,\frac{8\sqrt{E_z} - \sqrt{E_\varphi}}{E_\varphi\sqrt{E_z}}\,\frac{p_0 - p_1}{\varepsilon}\,r.$$

Comptes rendus, t. L, p. 932. Je disais explicitement, à ma lecture, ainsi qu'à un article imprimé au *Cosmos* de la même semaine, que les *coefficients* des élasticités inégales en divers sens *passaient en exposants* des rayons vecteurs, ce qui ressort du reste de ces formules.

M. S. Virgile, dans une Note récente (8 mai 1865, *id.*, t. LX, p. 962) *sur le frettage des bouches à feu*, a donné également, de la *force de tension des fibres circulaires*, ou de ce qui est appelé ici $p_{\varphi\varphi}$, des expressions où les modules E_φ, E_r des élasticités tangentielle et normale à ces fibres figurent aussi, pour la racine carrée de leur rapport mutuel, en exposants des rayons. Mais ces expressions diffèrent essentiellement de celles que je viens de donner. Cela vient de ce que leur auteur, voulant éviter l'emploi des formules de la théorie générale de l'élasticité, assimile, comme il le croit permis, les effets des tensions ou pressions qui s'exercent à l'intérieur d'un corps, à ceux de la traction d'une fibre isolée, ou d'un petit prisme dont les faces latérales sont libres. Cela reviendrait à supposer qu'on a les formules monômes

$$p_{rr} = E_r\partial_r,\quad p_{\varphi\varphi} = E_\varphi\partial_\varphi$$

au lieu des deux premières formules trinômes

$$(10)\text{ ou }(40)\quad p_{rr} = a\partial_r + f'\partial_\varphi + e'\partial_z = 3\,\frac{ef}{d}\,\partial_r + \ldots,\quad p_{\varphi\varphi} = f'\partial_r + b\,\partial_\varphi + d'\partial_z = \ldots,$$

ou, en substituant (48),

$$(40\ bis)\quad p_{rr} = \frac{6}{5}E_r\partial_r + \frac{2}{5}\sqrt{E_rE_\varphi}\,\partial_\varphi + \frac{2}{5}\sqrt{E_rE_z}\,\partial_z,\quad p_{\varphi\varphi} = \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_r}\,\partial_r + \frac{6}{5}E_\varphi\partial_\varphi + \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_z}\,\partial_z.$$

Cette supposition conduit, en effet, aux expressions que donne M. Virgile pour ses forces dites du *groupe principal* $\left(\text{sauf le rapport } \frac{r_1}{r_0} \text{ des rayons au lieu du rapport } \frac{r_1^2}{r_0^2} \text{ de leurs carrés, qui entrent dans ses deux premières formules}\right)$.

Il pose, il est vrai, à côté de ces expressions, d'autres expressions qui sont relatives à ce qu'il appelle les forces du *groupe secondaire*, et qui sont les tensions ou pressions tangentielles *engendrées* par les tensions ou pressions normales, ou réciproquement, lorsqu'un petit prisme de même matière soumis aux unes est *assujetti* ou *contenu* dans le sens des autres, c'est-à-dire lorsqu'il est astreint à conserver ses dimensions dans ces derniers sens, au lieu d'être libre de s'enfler ou de se rétrécir perpendiculairement à ceux de sollicitation. M. Virgile dit que ces deux groupes de forces se super-

9. *Application aux homogénéités polaires, ou du genre sphériconique et du sous-genre sphérique. Établissement simple des formules.* — Prenons, avec M. Lamé, pour coordonnées du point m d'un corps :

r, rayon vecteur Om de ce point, à partir d'un point central fixe O;

φ, sa latitude, ou l'angle que fait r avec un plan fixe ou *équateur* passant par O;

ψ, sa longitude, angle que le méridien de m, c'est-à-dire le plan mené par r perpendiculairement à l'équateur, fait avec un méridien fixe;

en sorte que les surfaces orthogonales coordonnées sont des sphères de rayon r, des *cônes de latitude* ayant pour axe l'intersection commune des méridiens et des bases circulaires de rayons $r\cos\varphi$ pour des côtés r; enfin des plans méridiens.

En sorte que :

U, V, W seront les projections du petit déplacement éprouvé par le point m, sur le prolongement de r, sur l'élément $rd\varphi$ de son cercle méridien, du côté de sa rencontre avec la moitié positive de l'axe polaire fixe; enfin sur l'élement $r\cos\varphi\, d\varphi$ de son *cercle de latitude* parallèle à l'équateur et ayant son centre sur l'axe, en comptant W positif du côté opposé au méridien fixe;

p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$, $p_{\psi\psi}$, $p_{\varphi\psi}$, $p_{\psi r}$, $p_{r\varphi}$ seront les composantes de pression, en m, sur l'unité superficielle des éléments des trois surfaces orthogonales conjuguées.

---

posent et confondent leurs effets. Mais, bien qu'il présente une évaluation des forces du second groupe, en donnant à leurs expressions la même forme qu'à celles des forces du premier, il ne les combine point ensemble, ou il n'en compose pas l'effet résultant ou total. Il dit au contraire que le premier groupe intéresse seul le plus souvent les solutions, et qu'on peut abstraire l'autre. Il fait aussi abstraction de la pression ou traction longitudinale, et des pressions transversales qu'elle *engendre* nécessairement de la même manière, dans le sens φ comme dans le sens r.

Notre solution n'oblige pas à ces suppressions que rien n'autorise, et dispense de faire de pareilles divisions et distinctions; car les formules générales de l'élasticité (1) ou (2), ou (10), (40), tiennent compte simultanément de tous les effets, directs ou latéraux, de chaque pression composante, ou autre force donnée. Je présente comme seules vraies les expressions $\frac{U}{r}$ [de (41)], et (42) ou (49), qu'elle donne pour ∂_φ et $p_{\varphi\varphi}$.

Et nous appellerons :

R, Φ, Ψ les composantes, suivant les mêmes trois directions (de r prolongé et des tangentes au *méridien* et au *parallèle* de m), de la force extérieure qui agit à la manière de la pesanteur sur les particules de l'unité de volume d'un petit élément solide dont m fait partie.

Posons directement, comme nous avons fait au n° 5 avec les coordonnées semi-polaires, l'équation de l'équilibre de translation, dans les sens r, φ, ψ où s'estiment U, V, W, d'un élément de volume terminé par deux sphères distantes de Δr, deux cônes ayant des demi-angles au centre différant de $\Delta\varphi$, et deux méridiens distants angulairement de $\Delta\psi$. Pour cela plaçons (n° 5) le point m à son milieu, ou à l'intersection des trois surfaces moyennes entre celles-là, et appelons

$$(51)\quad A_r = r\Delta\varphi . r\cos\varphi\Delta\psi,\quad A_\varphi = r\cos\varphi\Delta\psi.\Delta r,\quad A_\psi = r\Delta\varphi.\Delta r$$

les portions de leurs trois aires interceptées par les faces de l'élément. Nous aurons d'abord (même n° 5) les sommes suivantes de composantes de pressions

$$(52)\quad \begin{cases} \text{dans le sens } r, & \dfrac{d.A_r p_{rr}}{dr}\Delta r + \dfrac{d.A_\varphi p_{\varphi r}}{d\varphi}\Delta\varphi + \dfrac{d.A_\psi p_{\psi r}}{d\psi}\Delta\psi, \\ \quad\text{»}\quad \varphi, & \dfrac{d.A_r p_{r\varphi}}{dr}\Delta r + \dfrac{d.A_\varphi p_{\varphi\varphi}}{d\varphi}\Delta\varphi + \dfrac{d.A_\psi p_{\psi\varphi}}{d\psi}\Delta\psi, \\ \quad\text{»}\quad \psi, & \dfrac{d.A_r p_{r\psi}}{dr}\Delta r + \dfrac{d.A_\varphi p_{\varphi\psi}}{d\varphi}\Delta\varphi + \dfrac{d.A_\psi p_{\psi\psi}}{d\psi}\Delta\psi. \end{cases}$$

Il faut y ajouter les composantes provenant du défaut de parallélisme ou de perpendicularité, aux trois directions r, φ, ψ qui sont relatives au centre m de l'élément, des six directions de même nom qui sont relatives aux centres de ses six faces.

Pour cela, appelons respectivement

$$r',\quad \varphi',\quad \psi'$$

celles qui partent du centre de la face antérieure, quasi-parallèle à A_φ, et

$$r'',\quad \varphi'',\quad \psi''$$

celles qui partent du centre de la face quasi-parallèle à A_ψ, et aussi *antérieure*, ou ayant pour troisième coordonnée $\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi$ et non $-\frac{1}{2}\Delta\psi$. Nous aurons

$$(53)\quad \begin{cases} \cos(\varphi', r) = -\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \cos(r', \varphi) = \frac{\Delta\varphi}{2}: \\ \text{car l'angle } (\varphi', r) = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \text{et} \quad (r', \varphi) \text{ en est le supplément.} \end{cases}$$

Nous aurons aussi

$$(54)\quad \begin{cases} \cos(\psi'', r) = -\frac{\Delta\psi}{2}\cos\varphi, \quad \cos(\psi'', \varphi) = \frac{\Delta\psi}{2}\sin\varphi, \\ \cos(r'', \psi) = \frac{\Delta\psi}{2}\cos\varphi, \quad \cos(\varphi'', \psi) = -\frac{\Delta\psi}{2}\sin\varphi; \end{cases}$$

car, à l'égard des deux premiers de ces quatre angles, si l'on nomme r_1 la direction de la projection du rayon r sur le plan du parallèle de m, comme l'angle (ψ'', r_1) est $= \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\psi}{2}$, une longueur $= 1$ portée sur la tangente ψ'' à ce cercle de latitude donne, sur r_1, une projection $-\frac{\Delta\psi}{2}$: et cette projection, à son tour, donne $-\frac{\Delta\psi}{2}\cos\varphi$ et $-\frac{\Delta\psi}{2}(-\sin\varphi)$ en la projetant sur les directions r et φ. Or ce sont bien là les projections de cette longueur $r = 1$ elle-même sur ces dernières directions, puisque sa projection sur la direction ψ ne fournit rien, ni projetée sur r, ni projetée sur φ, auxquels ψ est perpendiculaire. Quant aux deux derniers angles (54), ils sont suppléments des deux premiers.

On trouve, au reste, ces mêmes expressions (53) et (54) en composant chaque cosinus de l'angle de deux directions au moyen des six cosinus (58), ci-après, des angles qu'elles font avec trois axes fixes x, y, z.

En multipliant par ces six cosinus (53), (54) les pressions sur les faces moyennes, savoir

$$(55)\quad A_\varphi p_{\varphi\varphi},\quad A_\varphi p_{\varphi r},\quad A_\psi p_{\psi\psi},\quad A_\psi p_{\psi\psi},\quad A_\psi p_{\psi r},\quad A_\psi p_{\psi\varphi},$$

il suffit de doubler les produits pour avoir, à cela près de quantités négligeables du troisième ordre, ce qui vient à la fois des faces antérieures et des faces postérieures, où les forces correspondantes agissent en sens inverse, mais pour lesquelles, par compensation, les cosinus ont des valeurs de signe contraire. On a ainsi, pour les forces à ajouter à (52),

$$(56)\quad \begin{cases} \text{dans le sens } r, & -A_\varphi p_{\varphi\varphi}\Delta\varphi - A_\psi p_{\psi\psi}\cos\varphi\,\Delta\psi, \\ \quad \text{»} \quad \varphi, & A_\varphi p_{\varphi r}\Delta\varphi + A_\psi p_{\psi\psi}\sin\varphi\,\Delta\psi, \\ \quad \text{»} \quad \psi, & A_\psi p_{\psi r}\cos\varphi\,\Delta\psi - A_\psi p_{\psi\varphi}\sin\varphi\,\Delta\psi. \end{cases}$$

Substituant les valeurs (51) de A_r, A_φ, A_ψ, et effectuant, puis égalant à zéro après avoir divisé par le volume de l'élément qui est

$$\Delta r . r\Delta\varphi . r\cos\varphi\,\Delta\psi,$$

et ajoutant les forces extérieures qui agissent dans les mêmes trois sens sur l'unité de volume, on obtient les équations d'équilibre suivantes, dont cette démonstration motive bien la composition,

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{rr}}{dr} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{d(p_{r\varphi}\cos\varphi)}{d\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dp_{\psi r}}{dr} + \dfrac{2p_{rr} - p_{\varphi\varphi} - p_{\psi\psi}}{r} + R = 0, \\ \dfrac{dp_{r\varphi}}{dr} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{d(p_{\varphi\varphi}\cos\varphi)}{d\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dp_{\varphi\psi}}{dr} + \dfrac{3p_{r\varphi} + p_{\psi\psi}\operatorname{tang}\varphi}{r} + \Phi = 0, \\ \dfrac{dp_{\psi r}}{dr} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{d(p_{\varphi\psi}\cos\varphi)}{d\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dp_{\psi\psi}}{d\psi} + \dfrac{3p_{\psi r} - p_{\varphi\psi}\operatorname{tang}\varphi}{r} + \Psi = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont identiques à celles que **M.** Lamé a déduites de trois autres équations de vingt-trois, de vingt-deux et de quatorze termes, obtenues par le procédé mixte (n° 5). Pour les en déduire il les ajoute trois fois entre elles, après multiplication par les trois premières, les trois qui suivent et les trois dernières des expressions suivantes des cosinus des angles que font les directions r, φ, ψ avec trois axes rectangulaires fixes des x, des y, des z; le troisième de ces axes fixes est celui du système sphériconique, et le premier est l'intersection du plan mé-

ridien fixe zx avec l'équateur xy :

$$(58)\begin{cases}\cos(r,x)=\cos\varphi\cos\psi, & \cos(r,y)=\cos\varphi\sin\psi, & \cos(r,z)=\sin\varphi,\\ \cos(\varphi,x)=-\sin\varphi\cos\psi, & \cos(\varphi,y)=-\sin\varphi\sin\psi, & \cos(\varphi,z)=\cos\varphi,\\ \cos(\psi,x)=-\sin\psi, & \cos(\psi,y)=\cos\psi, & \cos(\psi,z)=0.\end{cases}$$

En effet, les trois équations, plus compliquées que (57), dont nous parlons, expriment (n° 5) l'équilibre de translation de l'élément dans les directions de ces coordonnées x, y, z.

Pour l'établissement des expressions des dilatations et glissements en fonction des coordonnées sphériques, servons-nous du procédé analytique (n° 5) en montrant comment on peut en diminuer considérablement les calculs. Si nous adoptons avec M. Lamé les abréviations

$$(59)\qquad \cos\varphi=\mathrm{c},\quad \sin\varphi=\mathrm{s},\quad \cos\psi=\mathrm{c}',\quad \sin\psi=\mathrm{s}',$$

nous obtenons, comme particularisation des relations indiquées par (c) et (e) d'une manière générale au n° 5 ci-dessus, entre les coordonnées polaires et les coordonnées rectangles x, y, z qui viennent d'être désignées, ainsi qu'entre U, V, W et les déplacements u, v, w dans les sens de celles-ci,

$$(60)\quad u=\mathrm{cc}'\mathrm{U}-\mathrm{sc}'\mathrm{V}-\mathrm{s}'\mathrm{W},\quad v=\mathrm{cs}'\mathrm{U}-\mathrm{ss}'\mathrm{V}+\mathrm{c}'\mathrm{W},\quad w=\mathrm{s}\mathrm{U}+\mathrm{c}\mathrm{V};$$

$$(61)\quad\begin{cases}x=r\mathrm{cc}', & y=r\mathrm{cs}', & z=r\mathrm{s},\\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & \operatorname{tang}\varphi=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \operatorname{tang}\psi=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

Différentions; mais après et à mesure que les différentiations sont effectuées, faisons

$$(62)\qquad \psi=0,\quad \text{d'où}\quad \mathrm{c}'=1,\quad \mathrm{s}'=0;$$

ce qui revient à prendre le méridien du point m pour le méridien fixe auquel on rapporte les points environnant m; et ce qui ne restreindra aucunement la généralité des résultats finaux, puisque tout est symétrique autour de l'axe du système. Nous aurons ainsi pour les formules

désignées par (f) au n° 3 :

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dx} = c, & \dfrac{dr}{dy} = 0, \quad \dfrac{dr}{dz} = s, \\ \dfrac{d\varphi}{dx} = -\dfrac{s}{r}, & \dfrac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \dfrac{d\varphi}{dz} = \dfrac{c}{r}, \\ \dfrac{d\psi}{dx} = 0, & \dfrac{d\psi}{dy} = \dfrac{1}{rc}, \quad \dfrac{d\psi}{dz} = 0; \end{cases}$$

et, pour les formules (g) de changement de variables,

$$(64)\qquad \frac{d.}{dx} = c\frac{d.}{dr} - \frac{s}{r}\frac{d.}{d\varphi}, \quad \frac{d.}{dy} = \frac{1}{rc}\frac{d.}{d\psi}, \quad \frac{d.}{dz} = s\frac{d.}{dr} + \frac{c}{r}\frac{d.}{d\varphi}.$$

En mettant successivement les expressions (60) de u, v, w à la place du point symbolique, et en faisant toujours $\psi = 0$ aussitôt et à mesure que les différentiations sont opérées, on obtient les valeurs des neuf dérivées de u, v, w, qui, substituées dans

$$\partial_x = \frac{du}{dx}, \ldots, \quad g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \ldots,$$

donnent six expressions $[(h)$ du n° 5$]$ affectées du monôme $\frac{dU}{dr}$, du binôme $\frac{dV}{rd\varphi} + \frac{U}{r}$, et de quatre certains trinômes; et qui sont, en appelant provisoirement ∂, ∂', ∂'', g, g', g'' ces fonctions monômes, binômes, trinômes de U, V, W (que nous écrirons tout à l'heure),

$$(65)\quad \begin{cases} \partial_x = c^2\partial + s^2\partial' - 2csg'', \quad \partial_y = \partial', \quad \partial_z = s^2\partial + c^2\partial' + 2csg'', \\ g_{yz} = sg' + cg, \quad g_{zx} = 2cs(\partial - \partial') + (c^2 - s^2)g', \quad g_{xy} = cg' - sg. \end{cases}$$

Or ces expressions étant mises, à leur tour, dans les suivantes, qui particularisent les (i) du n° 5,

$$(66)\quad \begin{cases} \partial_r = \partial_x c^2 + \partial_z s^2 + g_{zx}cs, \ \partial_\varphi = \partial_x s^2 + \partial_z c^2 - g_{zx}cs, \ \partial_\psi = \partial_y, \\ g_{\varphi\psi} = g_{yz}c - g_{xy}s, \ g_{\psi r} = g_{yz}s + g_{xy}c, \ g_{r\varphi} = -2\partial_x cs + 2\partial_z cs + g_{zx}(c^2 - s^2), \end{cases}$$

rendent celles-ci précisément égales à ∂, ∂', ∂'', g, g', g''. Écrivons donc les fonctions que représentent ces six lettres, et égalons-les à $\partial_r, \ldots, g_{r\varphi}$,

nous avons [pour (k) du n° 5]

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} &\partial_r = \frac{dU}{dr}, \quad \partial_\varphi = \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi} + \frac{U}{r}, \quad \partial_\psi = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dW}{d\psi} + \frac{U}{r} - \frac{V}{r}\operatorname{tang}\varphi, \\ &g_{\varphi\psi} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dV}{d\psi} + \frac{1}{r}\frac{dW}{d\varphi} + \frac{W}{r}\operatorname{tang}\varphi, \quad g_{\psi r} = \frac{dW}{dr} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dU}{d\psi} - \frac{W}{r}, \quad g_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}; \end{aligned}\right.$$

formules qui concordent avec celles que M. Lamé a trouvées pour les pressions dans un corps isotrope.

On n'y arrive qu'après des calculs démesurés lorsqu'on laisse arbitraire ψ, qui doit disparaître de toute manière et ne pas se trouver dans les résultats.

10. *Sphère creuse, douée de l'homogénéité sphériconique.* — Supposons que sa matière soit douée aussi en chaque point de la symétrie de contexture (n° **2**) par rapport à trois plans, qui est définie par les formules dérivées de (2) et déjà employées pour le cylindre,

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} p_{rr} &= \mathrm{a}\partial_r + \mathrm{f}'\partial_\varphi + \mathrm{e}'\partial_\psi, & p_{\varphi\psi} &= \mathrm{d}g_{\varphi\psi}, \\ p_{\varphi\varphi} &= \mathrm{f}'\partial_r + \mathrm{b}\partial_\varphi + \mathrm{d}'\partial_\psi, \quad \text{et} & p_{\psi r} &= \mathrm{e}g_{\psi r}, \\ p_{\psi\psi} &= \mathrm{e}'\partial_r + \mathrm{d}'\partial_\varphi + \mathrm{c}\partial_\psi, & p_{r\varphi} &= \mathrm{f}g_{r\varphi}; \end{aligned}\right.$$

et prenons pour données, avec M. Lamé, des pressions normales et constantes

$$-p_0, \quad -p_1$$

sollicitant respectivement les surfaces sphériques intérieure et extérieure, dont les rayons sont

$$r_0, \quad r_1.$$

Vu que tout est symétrique autour du rayon servant d'axe au système, les points appartenant à ce rayon particulier ne pourront se déplacer que dans sa direction. Voyons à quelles conditions, ou pour quelles relations entre les données, il en sera de même pour tous les autres rayons vecteurs, en sorte qu'on ait partout

$$(69)\qquad V = 0, \quad W = 0.$$

Si l'on introduit cette supposition dans (67), puis dans (68), en faisant de plus, vu la symétrie parfaite autour de l'axe polaire,

$$(70) \qquad \frac{dU}{d\varphi} = 0,$$

on a

$$(71) \quad \begin{cases} \partial_r = \dfrac{dU}{dr}, \quad \partial_\varphi = \partial_\psi = \dfrac{U}{r}, \quad g_{\varphi\psi} = 0, \quad g_{\psi r} = \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dU}{d\psi}, \quad g_{r\varphi} = 0, \\ p_{rr} = a\dfrac{dU}{dr} + (e' + f')\dfrac{U}{r}, \qquad p_{\varphi\psi} = 0, \\ p_{\varphi\varphi} = f'\dfrac{dU}{dr} + (b + d')\dfrac{U}{r}, \quad \text{et} \quad p_{\psi r} = \dfrac{e}{r\cos\varphi}\dfrac{dU}{d\psi}, \\ p_{\psi\psi} = e'\dfrac{dU}{dr} + (c + d')\dfrac{U}{r}, \qquad p_{r\varphi} = 0. \end{cases}$$

Et les trois équations d'équilibre (57), dont la seconde se réduit à $-p_{\varphi\varphi} + p_{\psi\psi} = 0$, deviennent

$$(72) \quad \begin{cases} a\dfrac{d^2U}{dr^2} + 2a\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{dr} - (b+c+2d'-e'-f')\dfrac{U}{r^2} + \dfrac{e}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{dU}{dr} - \dfrac{U}{r}\right) = 0, \\ (e' - f')\dfrac{dU}{dr} + (c - b)\dfrac{U}{r} = 0, \\ \dfrac{e}{r\cos\varphi}\dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{dU}{dr} + 2\dfrac{U}{r}\right) = 0. \end{cases}$$

Elles doivent être satisfaites toutes trois par la même valeur de U.

Or, on tire de la seconde, C″ étant une constante,

$$(73) \qquad U = C'' r^{\frac{b-c}{e'-f'}}.$$

Cette valeur satisfait identiquement à la troisième; et si on la substitue dans la première, on peut tout diviser par $Cr^{\frac{b-c}{e'-f'}-2}$, ce qui donne, comme condition pour que l'on puisse avoir (69) $V = 0$, $W = 0$, la relation suivante entre les coefficients

$$(74) \qquad \left(\frac{b-c}{e'-f'}\right)^2 + \frac{b-c}{e'-f'} = \frac{b+c+2d'-e'-f'}{a}.$$

On aurait la même chose, si l'on supposait *à priori* que U est fonction de r seul, en résolvant d'abord la première équation (72) débarrassée ainsi de son dernier terme, car si on l'assimile à l'équation différentielle générale (20) du n° **7**, en faisant ses paramètres $m = \frac{1}{2}$ et

$$n = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{b + c + 2d' - e' - f'}{a}},$$

l'intégrale (21) de celle-ci donne, C et C′ étant deux constantes,

$$(75) \qquad U = Cr^{n-\frac{1}{2}} + C'r^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Substituant dans la seconde équation différentielle (72), on a

$$\left[(e' - f')\left(n - \frac{1}{2}\right) + c - b\right]Cr^{2n} + \left[-(e'-f')\left(n + \frac{1}{2}\right) + c - b\right]C' = 0,$$

condition qui ne peut être satisfaite quel que soit r que si les deux quantités entre crochets s'annulent, ou au moins l'une des deux avec la constante qui affecte l'autre. Or ces deux quantités égalées à zéro donnent pour n les deux valeurs

$$(76) \qquad n = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{b - c}{e' - f'}\right),$$

qui, égalées à ce que représente n, redonnent bien la condition ou relation obligée (74).

Si cette condition (74) est remplie, et si l'on n'a pas $e' = f'$, le déplacement U est donné par l'expression exponentielle monôme (73), à laquelle on ramène même l'expression binôme (75) quand on met pour n, dans celle-ci, les deux valeurs (76).

Les composantes de pressions, variables, comme on voit, avec la distance au centre, ont pour valeurs (71)

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{rr} &= \left(a\,\frac{b - c}{e' - f'} + e' + f'\right) C'' r^{\frac{b-c}{e'-f'} - 1}, \\ p_{\varphi\varphi} = p_{\psi\psi} &= \frac{(b + d')e' - (c + d')f'}{e' - f'}\, C'' r^{\frac{b-c}{e'-f'} - 1}. \end{aligned} \right.$$

Mais il faut encore que celle de p_{rr} qui n'a, comme U, qu'une constante, puisse satisfaire à la fois aux deux conditions aux limites

$$(78)\qquad \begin{cases} p_{rr} = -p_0 & \text{pour} \quad r = r_0, \\ p_{rr} = -p_1 & \text{pour} \quad r = r_1. \end{cases}$$

Cela exige qu'il y ait, entre les deux pressions sur les parois intérieure et extérieure, un rapport déterminé par celui des rayons de ces parois, et qui est donné par

$$(79)\qquad \frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\frac{b-c}{e'-f'}-1}.$$

Il n'y aurait pas lieu à poser cette deuxième condition si la sphère était pleine.

11. *Même sphère douée de l'homogénéité simplement sphérique.* — Mais le rapport des deux pressions données p_0 et p_1 peut être absolument quelconque si le numérateur et le dénominateur de l'exposant de r dans la valeur (73) de U s'annulent à la fois, ou si l'on a, entre les coefficients qui déterminent l'élasticité, ces deux relations au lieu d'une seule (74) :

$$(80)\qquad e' = f', \quad b = c.$$

C'est ce qui a lieu, par exemple, *lorsque tous les rayons de la sphère sont des axes de symétrie de contexture,* ce qui entraîne, en outre (n° **5**), $b = 2c + e' = 2f + f'$.

Alors il n'y a plus de rayon particulier dont tous les points sont ombilicaux ou exceptionnels (n° **1**). Le seul point ombilical est le centre, en ce que, quand la sphère est pleine, il faut s'écarter légèrement de ce point pour trouver des éléments qui soient identiques à tous les autres éléments du même corps. Tout rayon peut être pris pour axe du système, et la matière jouit du *sous-genre* d'homogénéité (n° **5**) qui peut être appelé *sphérique.*

Les déplacements causés par des pressions constantes et normales aux parois ne peuvent se faire que suivant les rayons, et être fonctions

que de r seul; en sorte que les égalités supposées (69) $V = 0$, $W = 0$ sont ici obligées, ainsi que (70) $\frac{dU}{d\varphi} = 0$, et aussi

$$\frac{dU}{d\psi} = 0.$$

Il n'y a plus lieu de prendre la solution monôme (73) tirée de la deuxième équation (72), même quand il y aurait eu, entre les coefficients, des relations telles que $\frac{b - c}{e' - f'}$ ne donne plus $\frac{0}{0}$ en faisant $e' = f'$, par exemple les relations de distribution ellipsoïdale $b = 3\frac{f'd'}{e'}$, $c = 3\frac{d'e'}{f'}$, d'où $\frac{b - c}{e' - f'} = \frac{3d'(e' + f')}{e'f'}$; en effet, cela n'empêche pas la deuxième équation (72), dont les deux termes sont alors affectés de $e' - f'$, d'être identiquement satisfaite, et l'on ne peut pas s'en servir pour obtenir U.

Il faut donc tirer la solution de la première équation d'équilibre (72), seule subsistante, et dont on doit effacer le dernier terme, vu que $\frac{dU}{d\psi} = 0$.

Si l'on fait

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8\frac{b + d' - e'}{a}}, \tag{81}$$

cette équation donne

$$U = Cr^{n - \frac{1}{2}} + C'r^{-n - \frac{1}{2}}. \tag{82}$$

Il en résulte

$$(83)\quad \begin{cases} \partial_r = \dfrac{dU}{dr} = \left(n - \frac{1}{2}\right)Cr^{n - \frac{3}{2}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)C'r^{-n - \frac{3}{2}}, \\ \partial_\varphi = \partial_\psi = \dfrac{U}{r} = Cr^{n - \frac{3}{2}} + C'r^{-n - \frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(84)\quad \begin{cases} p_{rr} = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)a + 2e'\right]Cr^{n - \frac{3}{2}} - \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)a - 2e'\right]C'r^{-n - \frac{3}{2}}, \\ p_{\varphi\varphi} = p_{\psi\psi} = \left[b + d' + \left(n - \frac{1}{2}\right)e'\right]Cr^{n - \frac{3}{2}} + \left[b + d' - \left(n + \frac{1}{2}\right)e'\right]C'r^{-n - \frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Et les conditions aux superficies, résultant de la substitution, à p_{rr} et r, de $-p_0$ et r_0, $-p_1$ et r_1 successivement, dans la première de ces équations (84), fournissent pour les constantes

$$(85)\quad \begin{cases} C = \dfrac{p_0 r_0^{n+\frac{3}{2}} - p_1 r_1^{n+\frac{3}{2}}}{\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2e'\right](r_1^{2n} - r_0^{2n})}, \\[2ex] C' = \dfrac{\left(p_0 r_0^{\frac{3}{2}-n} - p_1 r_1^{\frac{3}{2}-n}\right)(r_0 r_1)^{2n}}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a - 2e'\right](r_1^{2n} - r_0^{2n})}. \end{cases}$$

En les substituant dans (82), on a

$$(86)\quad U = \frac{1}{r_1^{2n} - r_0^{2n}}\left[\frac{p_0 r_0^{n+\frac{3}{2}} - p_1 r_1^{n+\frac{3}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2e'} r^{n-\frac{1}{2}} + \frac{p_0 r_0^{\frac{3}{2}-n} - p_1 r_1^{\frac{3}{2}-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a - 2e'}(r_0 r_1)^{2n} r^{-n-\frac{1}{2}}\right]$$

qui, divisé par r, donne les dilatations tangentielles

$$\partial_\varphi = \partial_\psi = \frac{U}{r},$$

variables, comme on voit, avec la distance au centre.

D'où aussi, U_0 étant U pour $r = r_0$, la valeur suivante de la proportion de la dilatation cubique de la cavité sphérique :

$$(87)\quad \frac{3U_0}{r} = \frac{3r_0^{n-\frac{3}{2}}}{r_1^{2n} - r_0^{2n}}\left[\frac{p_0 r_0^{n+\frac{3}{2}} - p_1 r_1^{n+\frac{3}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2e'} + \frac{p_0 r_0^{\frac{3}{2}-n} - p_1 r_1^{\frac{3}{2}-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a - 2e'} r_1^{2n}\right].$$

Dans le cas particulier de l'isotropie, où

$$d' = e', \quad b = a, \quad n = \frac{3}{2},$$

ces formules se réduisent, en faisant $e' = A$, $a = 3A$, à ce qui a été trouvé pour une sphère isotrope, au moyen des coordonnées recti-

lignes ordinaires, par MM. Lamé et Clapeyron en 1828 [*], et à peu près en même temps par M. Poisson [**]. Et, en remplaçant

$$\mathrm{a} \text{ par } \lambda + 2\mu, \quad \mathrm{e}' \text{ par } \lambda,$$

elles sont aussi conformes à ce qui a été trouvé en 1852 par M. Lamé, au moyen des coordonnées sphériques.

Mais on voit, ici comme pour le cylindre creux (n° **7**), que lorsque l'élasticité de la matière de la sphère, dans le sens de l'épaisseur de son enveloppe, n'a pas la même grandeur que les élasticités dans les sens tangentiels à ses couches, ce qui sera sans doute très-fréquent, les formules, malgré le passage en exposants des coefficients qui mesurent l'élasticité, sont à peu près aussi simples que les formules supposant l'isotropie.

On dispose alors, pour interpréter les faits, de trois constantes, a, e′ ou e, et $\mathrm{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}$; ou tout au moins de deux d, e en faisant

$$\mathrm{a} = 3\frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}} = 3\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{d}}, \quad \mathrm{b} = 3\frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}} = 3\mathrm{d},$$

relations voulues pour la distribution ellipsoïdale des élasticités (n° **3**). On voit donc que pour expliquer ceux des faits qui ne s'accordent pas avec les formules d'isotropie à un seul coefficient, il n'est nullement nécessaire d'admettre et d'employer des formules d'isotropie à deux coefficients, que je maintiens être fautives.

Supposons que l'enveloppe soit d'une faible épaisseur ε.

En faisant dans les expressions (85) de C et C′ :

$$(88) \qquad r_0 = \mathrm{r} - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad r_1 = \mathrm{r} + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

---

[*] Sur l'équilibre intérieur des solides homogènes (*Savants étrangers*, t. IV, n°s 57 à 60).

[**] *Annales de Chimie et de Physique*, 1828, 2e série, t. XXXVIII, p. 330.

et négligeant ε^2, elles deviennent

$$(89)\qquad C = \frac{(p_0 - p_1)\,\mathrm{r}^{\frac{5}{2}-n}}{\left[\left(\mathrm{n} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{a} + 2\mathrm{e}'\right].2\mathrm{n}\varepsilon}, \quad C' = \frac{(p_0 - p_1)\,\mathrm{r}^{\frac{5}{2}+n}}{\left[\left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{a} - 2\mathrm{e}'\right].2\mathrm{n}\varepsilon};$$

d'où, en substituant dans (84), et remettant pour n^2 sa valeur $\frac{1}{4} + 2\frac{\mathrm{b} + \mathrm{d}' - \mathrm{e}'}{\mathrm{a}}$:

$$(90)\qquad p_{\varphi\varphi} = p_{\psi\psi} = \frac{(p_0 - p_1)\,\mathrm{r}}{2\varepsilon}.$$

Cette expression, analogue à celle (31) de Mariotte relative au cylindre, de la traction éprouvée par la paroi d'une sphère mince pressée intérieurement et extérieurement, a été trouvée par Navier [*]. Elle est facile à démontrer directement, car la pression que chaque moitié de la sphère éprouve a la même résultante $(p_0 - p_1)\pi\mathrm{r}^2$ que celle qu'éprouverait le grand cercle diamétral s'il servait de couvercle à l'autre moitié; et elle doit, pour l'équilibre, être égale à la traction $p_{\varphi\varphi}.2\pi\mathrm{r}\varepsilon$ supportée par la couronne suivant laquelle le plan de ce grand cercle coupe l'enveloppe sphérique.

En substituant de même les valeurs (89) de C et C' dans (83), nous trouvons

$$(91)\qquad \partial_\varphi = \partial_\psi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}(\mathrm{b} + \mathrm{d}') - 2\mathrm{e}'^2}\,\frac{(p_0 - p_1)\,\mathrm{r}}{2\varepsilon}$$

pour la dilatation tangentielle à laquelle il faut imposer une limite, relative à chaque matière, pour établir la condition de *résistance*, ou de stabilité de la cohésion.

Le quotient

$$(92)\qquad \frac{p_{\varphi\varphi}}{\partial_\varphi} = \mathrm{b} + \mathrm{d}' - \frac{2\mathrm{e}'^2}{\mathrm{a}}$$

n'est point égal au module d'élasticité E de Navier et de Young, qui

[*] *Résumé des Leçons à l'École des Ponts et Chaussées*, 1833, n° 670.

est le rapport de la traction à la dilatation longitudinale d'un prisme de même matière. Quand il y a isotropie, ou quand $b = a = 3d = 3e$, et même seulement quand il y a distribution ellipsoïdale des élasticités, on a $b = \frac{3fd}{e} = 3d$, $a = 3\frac{ef}{d} = 3\frac{e^2}{d}$, vu l'égalité déjà supposée (80) $e = f$. Donc, alors

$$(93) \qquad \partial_\varphi = \partial_\psi = \frac{3}{20d} \cdot \frac{(p_0 - p_1)r}{\varepsilon}, \quad \frac{p_{\varphi\varphi}}{\partial_\varphi} = \frac{10}{3} d;$$

en sorte que ce quotient $\frac{p_{\varphi\varphi}}{\partial_\varphi}$ est les $\frac{4}{3}$ du module connu $E = \frac{5}{2} d$.

12. *Vase cylindrique terminé par deux calottes sphériques.* — Parmi les aperçus ingénieusement pratiques dus à l'esprit initiateur de M. Lamé, on doit remarquer ce qui se trouve consigné aux *Comptes rendus de l'Académie*, dans une simple Note de 1850 intitulée: *Sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur* [*]. L'excellent géomètre y recherche à quelle condition une chaudière cylindrique, terminée par deux portions de sphère, et soumise intérieurement à une forte pression, éprouvera la même modification, dans la partie cylindrique, que si le cylindre était de longueur indéfinie, et, dans les calottes sphériques, que si elles appartenaient à des sphères creuses entières, en sorte que chaque partie agisse sur l'autre, à la jonction, comme feraient les portions manquant à chacune. C'est bien la condition pour que l'enveloppe se dilate partout sans flexion ou altération de forme, et résiste ainsi avec le plus grand avantage. Par les chiffres que M. Lamé donne comme règle, et que l'on reconnaît être déduits du Mémoire présenté par lui et par M. Clapeyron en 1828 en se servant des formules d'isotropie à un seul coefficient, on voit qu'il exprime, pour cela, que la dilatation tangentielle soit la même dans les deux sortes de surfaces, ou que les cercles de jonction s'étendent autant comme faisant partie du cylindre que comme faisant partie des sphères.

Nous pouvons, à l'aide de nos formules ci-dessus, donner des règles plus générales, et applicables non-seulement quand la matière des

[*] 18 février, t. XXX, p. 157.

tôles n'est pas isotrope, mais même quand celle des parties sphériques est d'une variété de métal différente de celle de la partie cylindrique.

Désignons par l'indice 1 les dilatations et les coefficients d'élasticité relatifs aux parties sphériques, en réservant pour la partie cylindrique les lettres sans indices. La condition d'égalité des dilatations pour les cercles de raccordement sera

$$(94) \qquad \partial_\varphi = \partial_{\varphi_1};$$

ou, en mettant pour ∂_φ, ∂_{φ_1} les valeurs (32), (91) relatives à des matières homogènes, l'une *cylindriquement*, l'autre *sphériquement* (nos **7**, **11**), et en divisant les deux membres par $p_0 - p_1$,

$$(95) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{2ac - ad' + e'f' - 2e'^2}{abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f'}\cdot\frac{r}{\varepsilon} = \frac{a_1}{2a_1(b_1 + d'_1) - 4e'^2_1}\,\frac{r_1}{\varepsilon_1};$$

formule qui fournira le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ à donner aux épaisseurs quand le rapport $\frac{r_1}{r}$ des rayons sera donné, et réciproquement.

Au lieu de laisser les rapports mutuels des nombreux coefficients d'élasticité que cette formule contient pour chaque métal, dans un arbitraire qu'il n'est guère possible de faire cesser au moyen de résultats d'expériences, si l'on met pour les coefficients a, b, c, a_1, b_1, les valeurs $3\frac{ef}{d}$, $3\frac{fd}{e}$, $3\frac{de}{f}$, $3\frac{e_1^2}{d_1}$, $3d_1$, relatives à la distribution ellipsoïdale des élasticités directes (no **5**) qui convient aux métaux comme à toute matière qui n'est pas en cristaux réguliers, ou si l'on prend pour ∂_φ, ∂_{φ_1} les expressions (45), (93), cette condition devient

$$(96) \qquad \frac{8e - f}{fd}\cdot\frac{r}{\varepsilon} = \frac{3}{d_1}\,\frac{r_1}{\varepsilon_1},$$

ou, et vu que (no **8**) $d = \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_z}$, $e = \frac{2}{5}\sqrt{E_z E_r}$, $f = \frac{2}{5}\sqrt{E_r E_\varphi}$, $d_1 = \frac{2}{5}E_{\varphi_1}$,

$$(97) \qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{r}{r_1}\cdot\frac{8\frac{e}{f} - 1}{3}\,\frac{d_1}{d} = \frac{r}{r_1}\,\frac{8\sqrt{\frac{E_z}{E_\varphi}} - 1}{3}\,\frac{E_{\varphi_1}}{\sqrt{E_\varphi E_z}};$$

en sorte que les épaisseurs ε, ε_1 de la partie cylindrique et des parties sphériques devront être comme leurs rayons r, r_1 multipliés respecti-

vement par les fonctions

$$\frac{8\frac{e}{f}-1}{d} \text{ et } \frac{3}{d_1}; \quad \text{ou bien} \quad \frac{8-\sqrt{\frac{E_\varphi}{E_z}}}{E_\varphi} \text{ et } \frac{3}{E_{\varphi_1}}$$

des élasticités de leurs matières.

S'il y a isotropie, et même matière dans les deux parties, ou si

$$d = e = f = d_1, \quad E_\varphi = E_z = E_{\varphi_1},$$

l'on a pour la condition (97)

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{7r}{3r_1};$$

ou que les épaisseurs soient comme sept fois et trois fois les rayons, en sorte que si les épaisseurs sont les mêmes, les rayons du cylindre et des portions de sphère soient entre eux comme 3 est à 7, ce qui est la règle indiquée par M. Lamé pour les *fonds sphériques compensateurs*, élevant en quelque sorte, dit-il, le système des chaudières cylindriques au rang des formes naturelles, ou des solides d'égale résistance.

PRIX PROPOSÉ

PAR

L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES *NUOVI LINCEI.*

PROGRAMME POUR LE PRIX CARPI.

L'Académie, dans le but de conférer le prix annuel fondé par la généreuse disposition testamentaire d'un de ses membres ordinaires, feu le chevalier Dr Pierre Carpi, propose de développer le thème suivant.

THÈME.

Exposer une méthode au moyen de laquelle on puisse déterminer toutes *les valeurs rationnelles de x capables de rendre un carré ou un cube parfait le polynôme* $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, *pour des valeurs entières de* A, B, C, D, E, *pourvu qu'une ou plusieurs de ces valeurs de x existent réellement, et qui, en cas contraire, en fasse connaître l'impossibilité.*

ÉCLAIRCISSEMENTS.

Une méthode due au célèbre Pierre de Fermat pour rendre un carré

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

ou un cube l'expression

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

se trouve exposée par le P. Jacques de Billy dans son ouvrage intitulé : *Doctrinæ analyticæ inventum novum* (p. 30 et 31 de l'édition intitulée : *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus, etc.* Tolosæ MDCLXX). Cette méthode se trouve aussi exposée par Léonard Euler, dans les chapitres VIII, IX, et X du tome II de son ouvrage intitulé : *Einleitung der Algebra,* traduit en français sous le titre *Éléments d'Algèbre.*

Le tome XI des *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg* (année 1830) contient plusieurs Mémoires posthumes d'Euler, relatifs à l'analyse de Diophante, dont l'un est intitulé : *Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi*. Cette méthode, en la considérant bien, n'est autre, dit Jacobi, que celle de la *multiplication des intégrales elliptiques*, méthode déjà proposée par Euler même dans ses *Institutions de Calcul intégral*, et ailleurs, pour résoudre algébriquement l'équation transcendante

$$\Pi(y) = n\Pi(x),$$

où

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Cette importante observation de Jacobi se trouve dans le tome XIII du *Journal de Mathématiques de M. A.-L. Crelle* (année 1835), à l'article : *De usu theoriæ integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in Analysi Diophantea*.

La méthode donnée par Fermat pour rendre un carré

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

est exposée aussi dans le volume intitulé : *Théorie des nombres* (3e édition), par Adrien-Marie Legendre, t. II; Paris, 1830 (p. 123 à 125).

Dans un Mémoire de Lagrange intitulé : *Sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante*, et inséré dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, année 1777 (Berlin, 1779), est donnée aussi une méthode pour résoudre en nombres rationnels les équations générales de troisième et quatrième degré entre deux indéterminées x, y.

Cependant ces méthodes sont imparfaites : 1° parce qu'elles supposent déjà une solution connue; 2° parce qu'il n'est pas prouvé qu'elles fournissent toutes les solutions possibles. Il serait par conséquent à désirer qu'on en trouvât une autre qui n'eût besoin de la connaissance d'aucune solution, fît connaître si le problème est possible ou non, et dans les cas où il est possible, en donnât toutes les solutions; ce qui

serait d'un avantage remarquable dans la théorie des nombres, ou analyse indéterminée, et lui frayerait le chemin à d'importants progrès, n'ayant été jusqu'à présent satisfait, sauf dans des cas assez particuliers traités par de savants géomètres, aux conditions sus-énoncées. Cela pourrait aussi être utile au progrès d'autres parties des sciences mathématiques, comme on peut facilement le voir par la relation que Jacobi a indiquée dans son écrit cité ci-dessus entre le problème exposé et la doctrine des fonctions elliptiques.

CONDITIONS.

1° Les Mémoires sur le thème proposé devront être rédigés en italien, ou en latin, ou en français : nulle autre langue n'est admise.

2° Chaque Mémoire portera sur son frontispice une épigraphe, qui sera répétée à l'extérieur d'une enveloppe cachetée dans laquelle se trouveront le nom et l'adresse de l'auteur.

3° On ouvrira seulement l'enveloppe correspondante au Mémoire qui aura obtenu le prix.

4° Si les auteurs qui auront obtenu une mention honorable désirent que l'Académie publie leurs noms, il faudra qu'ils en fassent la demande dans les quatre mois qui suivront le jour dans lequel le prix aura été décerné; ce terme expiré, les enveloppes seront brûlées sans être décachetées.

5° L'Académie a décidé que, à l'exception de ses trente membres ordinaires, chacun, quelle que soit sa nationalité, pourra concourir pour ce prix.

6° Chaque Mémoire avec l'enveloppe cachetée correspondante devra être envoyé *franco* à l'Académie, avant le dernier jour du mois d'octobre 1866, date de la clôture du concours.

7° Le prix sera décerné par l'Académie dans le mois de janvier 1867 et consistera en une médaille d'or de la valeur de *cent écus romains*.

8° Le Mémoire couronné sera publié, entièrement ou par extrait, dans les *Atti* de l'Académie, et l'auteur en recevra cinquante exemplaires.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

PAR M. TCHÉBICHEF.

Lettre adressée à M. Braschman et lue le $\frac{18}{30}$ septembre 1865 dans la séance de la Société Philomathique à Moscou [*].

13 septembre 1865.

Monsieur,

Parmi les diverses applications des fractions continues algébriques qu'on a faites jusqu'à présent, celle que l'on rencontre dans l'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés* se distingue par un caractère tout particulier : dans ce cas, les fractions continues servent à déterminer les termes dans certains développements de la fonction en série. Cette interpolation et toutes les séries qui en résultent n'embrassent encore qu'une partie minime du champ d'un tel usage des fractions continues, et qui est peut-être aussi vaste que celui d'usage ordinaire de ces fractions dans l'analyse. En effet, à l'ordinaire elles servent à trouver les systèmes des polynômes X, Y, qui rendent la différence $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ la plus proche possible de zéro, en supposant bien entendu que la fonction u soit développable en série ordonnée suivant les puissances entières et décroissantes de la variable, et que le degré d'approchement se détermine par sa plus haute puissance dans le reste. Pour résoudre la question concernant l'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, 2[e] série, t. III, p. 235), il s'agissait de faire tendre le plus possible la différence de la forme $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, non pas vers

[*] Cette Société, qui s'est formée il y a une année sous la présidence de M. Braschmann, procède maintenant à l'impression des Mémoires que ses Membres ont présentés dans le courant de cette année.

zéro, mais vers une certaine fonction (vers $\frac{1}{x-X}$, d'après la notation du passage cité), et c'est ainsi qu'on est arrivé à un nouvel usage des fractions continues algébriques. Or ce cas particulier d'approchement de l'expression $uX - Y$ à une fonction donnée n'est pas le seul qui se présente dans l'analyse et qui demande un nouvel usage des fractions continues algébriques : quelle que soit la fonction donnée v, la détermination des polynômes X, Y, qui rendent l'expression $uX - Y$ la plus proche de v, se résout aussi à l'aide des fractions continues, et par des formules analogues à celles que l'on trouve dans l'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés*. Cette question sur la détermination des polynômes X, Y dans l'expression $uX - Y$ est d'autant plus intéressante, que par sa simplicité elle se place immédiatement après celle que l'on résout ordinairement au moyen des fractions continues algébriques, c'est-à-dire où il s'agit seulement de rendre l'expression $uX - Y$ aussi proche de zéro qu'il est possible.

Soit

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

la fraction continue qui résulte du développement de la fonction u, et

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 q_2 + P_1}{Q_2 q_2 + Q_1}, \ldots$$

ses fractions convergentes. Si l'on convient de désigner par E la partie entière des fonctions, les polynômes X, Y, qui rendent la différence $uX - Y$ la plus proche de la fonction v, seront donnés par les séries suivantes :

$$X = (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)\,Q_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)\,Q_2 + \ldots,$$
$$Y = -Ev + (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)\,P_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)\,P_2 + \ldots.$$

Ces séries sont finies ou infinies en même temps que la série des fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$$

et leurs termes, comme il n'est pas difficile de le remarquer, présentent des polynômes dont les degrés vont en croissant. Arrêtées aux termes correspondants, ces séries fournissent pour X, Y des valeurs entières et de degrés plus ou moins élevés, suivant le nombre de termes que l'on prend, et en tout cas *ces valeurs de* X *et* Y *sont celles qui rendent la différence* uX — Y *aussi proche de* v *que cela est possible avec des fonctions entières de mêmes degrés que* X *et* Y, *et aussi avec des fonctions de degrés plus élevés, mais inférieurs aux degrés des fonctions que l'on obtient en prenant dans les expressions de* X *et* Y *un terme de plus.*

Les valeurs de X et Y qui jouissent de cette propriété remarquable résultent du développement de la fonction v suivant les valeurs des fonctions

$$R_1 = uQ_1 - P_1,\quad R_2 = uQ_2 - P_2,\quad R_3 = uQ_3 - P_3,\ldots$$

dont les degrés sont au-dessous de zéro et vont en décroissant. Un tel développement de la fonction v est facile à obtenir. Si l'on ôte de v sa partie entière Ev, et que l'on divise le reste par R_1, le nouveau reste par R_2, et ainsi de suite, il est clair que les quotients de ces divisions, multipliés respectivement par $R_1, R_2,\ldots$, et ajoutés à Ev, donneront la valeur même de la fonction v exacte au dernier reste près. Or le développement de v que l'on trouve de cette manière présente, comme il est facile de s'en assurer, la série suivante :

$$v = \mathrm{E}v + (\mathrm{E}q_1 Q_1 v - q_1 \mathrm{E}Q_1 v) R_1 - (\mathrm{E}q_2 Q_2 v - q_2 \mathrm{E}Q_2 v) R_2 + \ldots,$$

où les termes sont certaines fonctions dont les degrés vont en décroissant.

Dans le cas le plus ordinaire, où les dénominateurs $q_1, q_2, q_3,\ldots$ de la fraction continue

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}}$$

sont tous du premier degré, cette série se simplifie beaucoup; tous les

facteurs qui accompagnent les fonctions R_1, R_2, R_3,... deviennent constants, et leurs valeurs se déterminent très-aisément : ces facteurs se réduisent aux produits

$$A_1 L_1, \quad A_2 L_2, \quad A_3 L_3, \ldots,$$

où A_1, A_2, A_3,... désignent les coefficients de x dans les dénominateurs q_1, q_2, q_3,... et L_1, L_2, L_3,... les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les produits

$$Q_1 v, \quad Q_2 v, \quad Q_3 v, \ldots.$$

D'où résulte dans le cas en question la série suivante, pour le développement de la fonction v :

$$v = \mathrm{E}v + A_1 L_1 R_1 - A_2 L_2 R_2 + \ldots,$$

et ces valeurs de X et Y, pour rapprocher la différence $u\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ le plus possible de v :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= A_1 L_1 Q_1 - A_2 L_2 Q_2 + \ldots, \\ \mathrm{Y} &= -\mathrm{E}v + A_1 L_1 P_1 - A_2 L_2 P_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction v peut être représentée par la somme

$$\psi(x) + \frac{k_1}{x - x_1} + \frac{k_2}{x - x_2} + \frac{k_3}{x - x_3} + \ldots,$$

$\psi(x)$ étant une fonction entière, et k_1, k_2, k_3,.., x_1, x_2, x_3... des constantes, on trouve, en posant

$$Q_1 = \psi_1(x), \quad Q_2 = \psi_2(x), \quad Q_3 = \psi_3(x), \ldots,$$

les expressions suivantes des quantités L_1, L_2, L_3,... :

$$\begin{aligned} L_1 &= k_1\psi_1(x_1) + k_2\psi_1(x_2) + k_3\psi_1(x_3) + \ldots = \sum k_i\psi_1(x_i), \\ L_2 &= k_1\psi_2(x_1) + k_2\psi_2(x_2) + k_3\psi_2(x_3) + \ldots = \sum k_i\psi_2(x_i), \\ L_3 &= k_1\psi_3(x_1) + k_2\psi_3(x_2) + k_3\psi_3(x_3) + \ldots = \sum k_i\psi_3(x_i), \end{aligned}$$

. . . .

Pour ces valeurs de L_1, L_2, L_3,... les séries précédentes deviennent

$$v = Ev + A_1 \sum k_i \psi_1(x_i) R_1 - A_2 \sum k_i \psi_2(x_i) R_2 + \ldots,$$

$$X = \qquad A_1 \sum k_i \psi_1(x_i) Q_1 - A_2 \sum k_i \psi_2(x_i) Q_2 + \ldots,$$

$$Y = Ev + A_1 \sum k_i \psi_1(x_i) P_1 - A_2 \sum k_i \psi_2(x_i) P_2 + \ldots,$$

où

$$\psi_1(x) = Q_1, \quad \psi_2(x) = Q_2, \ldots$$

Dans le cas particulier où la fonction u se réduit à un seul terme

$$\frac{1}{x-a},$$

on trouve, d'après la première de ces formules, le développement suivant de $\frac{1}{x-a}$,

$$\frac{1}{x-a} = A_1 \psi_1(a) R_1 - A_2 \psi_2(a) R_2 + \ldots,$$

où chaque terme présente le produit d'une fonction de a par une fonction de x, comme cela a lieu dans la série qui résulte du développement de $(x-a)^{-1}$ d'après la formule de Newton.

En faisant dans les formules précédentes

$$u = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n} = \sum \frac{1}{x-x_i},$$

$$v = \frac{F(x_1)}{x-x_1} + \frac{F(x_2)}{x-x_2} + \ldots + \frac{F(x_n)}{x-x_n} = \sum \frac{F(x_i)}{x-x_i},$$

on trouve les valeurs des polynômes X et Y par lesquelles la différence

$$\sum \frac{1}{x-x_i} \cdot X - Y,$$

s'approche le plus possible de $\sum \frac{F(x_i)}{x-x_i}$, et comme un tel rapprochement constitue la condition nécessaire et suffisante pour que le poly-

nôme X réduise au *minimum* la somme

$$\sum [X - F(x)]^2$$

(ce qui n'est pas difficile à montrer), il s'ensuit que l'expression de X, déterminée de cette manière, présente la formule d'*interpolation d'après la méthode des moindres carrés*.

Je n'insisterai plus sur le parti qu'on peut tirer du développement en série suivant les fonctions déterminées par le moyen des fractions continues algébriques; ce que je viens de dire suffit pour faire voir combien d'intérêt présente le sujet vers lequel m'ont porté vos leçons et vos précieux entretiens.

Agréez l'assurance d'une estime profonde,

P. TCHÉBICHEF.

SUR LES DEUX FORMES

$x^2 + y^2 + 6z^2 + 6t^2,\quad 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Il y a des formes qu'il est bon de réunir, pour la représentation d'un entier donné, parce qu'on arrive aisément à une expression simple du nombre total des représentations qu'elles fournissent ensemble, tandis qu'il serait difficile d'obtenir les nombres partiels relatifs à la représentation par chacune de ces formes prise à part. Cela a lieu pour les deux formes indiquées au titre de cet article, quand il s'agit de représenter un entier impair $3^\beta m$; car sans avoir les valeurs séparées des deux nombres que je désigne, d'après une notation connue, par

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

et

$$N(3^\beta m = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2),$$

on démontre sans peine que leur somme est égale à

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2),$$

c'est-à-dire égale au quadruple de la somme des diviseurs de l'entier m, qu'on suppose premier à 3, l'exposant β étant d'ailleurs quelconque, la valeur zéro non exclue.

Quand il s'agit d'un entier pair $2^\alpha 3^\beta m$, les deux formes n'ont plus besoin d'être réunies. Dans l'hypothèse de $\alpha > 0$, on s'assure en effet très-aisément que les deux nombres

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

et

$$N(2^{\alpha}3^{\beta}m = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2)$$

sont égaux entre eux; leur valeur commune est celle de

$$N(2^{\alpha-1}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2),$$

savoir

$$4\zeta_1(m)$$

quand $\alpha = 1$, et

$$4(2^{\alpha} - 3)\zeta_1(m)$$

quand α est > 1 : je désigne à mon ordinaire par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de l'entier impair m, qu'on suppose comme plus haut premier à 3.

SUR

DIVERSES FORMES FACILEMENT APPLICABLES,

qu'on peut donner aux équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur [*];

PAR M. R. CLAUSIUS.

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. H.-F. BESSARD.

Dans mes précédents Mémoires sur la théorie mécanique de la chaleur, je me suis essentiellement proposé d'établir la théorie sur une base sûre, en m'attachant surtout à ramener le second théorème principal, beaucoup plus difficile à saisir que le premier, à sa forme la plus simple et la plus générale, et en cherchant à en donner une démonstration rigoureuse. Je n'ai fait d'applications spéciales que lorsqu'elles me paraissaient utiles comme exemples, ou qu'elles présentaient un intérêt pratique particulier.

Plus la vérité des principes de la théorie mécanique de la chaleur est reconnue, plus on voit se marquer davantage la tendance à l'appliquer aux phénomènes les plus divers, tant physiques que mécaniques. Les équations différentielles qui s'y présentent devant être traitées un peu différemment que les équations différentielles ordinaires de forme analogue, les calculs présentent souvent des difficultés assez graves pouvant occasionner des erreurs. C'est pourquoi j'ai cru rendre

[*] Communiqué à la Société des Sciences naturelles de Zürich, le 24 avril 1865, et publié dans son *Bulletin trimestriel*, vol. X, p. 1, ainsi que dans les *Annales de Poggendorff*, vol. CXXV, p. 353.

un service aux physiciens et aux mécaniciens, en ramenant les équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur à d'autres formes, se rapportant à des suppositions spéciales, formes sous lesquelles elles sont immédiatement applicables aux divers cas spéciaux, et sont par conséquent plus commodes dans les applications que sous leur forme générale.

§ 1. Toute la théorie mécanique de la chaleur repose sur deux théorèmes principaux, celui de l'équivalence de la chaleur et du travail, et celui de l'équivalence des transformations.

Pour exprimer analytiquement le premier théorème, nous supposons qu'un corps quelconque change d'état, et nous considérons la quantité de chaleur qui doit lui être communiquée pendant ce changement. Désignons-la par Q, et admettons qu'elle soit positive si le corps en question la reçoit, et négative s'il la donne aux corps extérieurs. L'élément dQ de cette chaleur reçue par le corps, correspondant à un changement d'état infiniment petit, est exprimé par l'équation

$$(I) \qquad dQ = dU + A\,dW,$$

dans laquelle U représente la quantité que j'ai introduite en 1850 dans la théorie de la chaleur, et que j'ai définie : la somme de la chaleur restée libre, et de celle qui a été employée à effectuer du travail intérieur [*].

W. Thomson proposa plus tard de désigner cette grandeur par le nom d'*énergie* [**]; j'ai aussi accepté cette dénomination, la considérant comme heureusement choisie. Je crois cependant que l'on peut se réserver d'employer l'expression *contenu de chaleur et d'œuvre*, dans les cas où l'on veut distinguer les deux parties de la grandeur U ; cette expression rend ma définition primitive sous une forme un peu plus simple. La lettre W représente le travail extérieur effectué pendant le

[*] *Annales de Poggendorff*, vol. LXXIX, p. 385, et Collection de mes Mémoires, 1re partie, p. 83.

[**] *Philosophical Magazine*, 4e série, vol. IX, p. 523.

changement d'état du corps, et le coefficient A la quantité de chaleur équivalant à l'unité de travail, ou, plus simplement, l'*équivalent calorifique du travail*. D'après cela, le produit AW n'est que le travail extérieur, mesuré en unités calorifiques, ou, plus brièvement, l'*œuvre extérieure*, d'après une dénomination plus commode que j'ai proposée [*].

Si, pour plus de brièveté, on représente l'œuvre extérieure par une seule lettre, en écrivant

$$AW = w,$$

---

[*] Je profiterai de cette occasion pour donner quelques éclaircissements sur les dénominations que j'ai proposées dans un appendice à ma collection de Mémoires. Il est très-incommode, dans toute exposition de la théorie mécanique de la chaleur, que la chaleur et le travail mécanique soient évalués au moyen d'unités différentes; car ainsi l'on ne peut pas dire simplement « somme de chaleur et de travail, différence de chaleur et de travail », mais on est obligé de recourir à des expressions plus compliquées comme « somme de la chaleur et de la quantité de chaleur équivalant au travail », ou « somme du travail et de la quantité de travail équivalant à la chaleur ». C'est pourquoi j'ai proposé d'introduire encore une seconde grandeur en sus du travail évalué au moyen de l'unité mécanique ordinaire, et qui représente le *travail mesuré en unités calorifiques ou calories*, c'est-à-dire l'expression numérique du travail obtenue en prenant comme unité de travail la quantité de travail équivalant à une unité de chaleur. C'est pour cette grandeur que j'ai proposé le nom d'*œuvre* (*Werk*).

Si l'on considère l'œuvre effectuée lors d'un changement d'état quelconque d'un corps, il faut y distinguer l'œuvre intérieure et l'œuvre extérieure. J'ai appelé *contenu d'œuvre* du corps, l'œuvre intérieure totale qui a dû être effectuée pour l'amener à son état actuel. Il est à remarquer qu'on ne peut en obtenir la valeur qu'en déterminant l'œuvre intérieure qui a dû être effectuée pour que le corps passât d'un état initial quelconque à l'état actuel. On pourra donc indiquer le contenu d'œuvre, soit en n'y comprenant que l'œuvre effectuée à partir de cet état initial, soit en ajoutant encore une constante indéterminée représentant l'œuvre déjà contenue dans le corps à cet état initial.

Il en est naturellement de même de l'*énergie*, qui se compose du contenu d'œuvre et du contenu de chaleur. On ne peut la déterminer qu'en considérant l'accroissement qu'elle doit prendre lorsque le corps passe d'un état initial quelconque à son état actuel. En indiquant l'énergie, on pourra, ou se borner à cet accroissement compté à partir de l'état initial donné, ou lui ajouter encore une constante indéterminée représentant l'énergie du corps correspondant à cet état initial.

on pourra écrire l'équation précédente comme suit :

$$(\mathrm{I}_a) \qquad dQ = dU + dw.$$

Afin d'arriver à l'expression analytique la plus simple du second théorème principal, nous admettrons que le corps éprouve une *série circulaire* de changements, c'est-à-dire qu'il finisse par être ramené à son état initial. Soient dQ un élément de la chaleur reçue, et T la température du corps, comptée à partir du zéro absolu, à l'instant où il reçoit cet élément de chaleur; ou du moins celle de la partie du corps qui reçoit cet élément de chaleur, dans le cas où la température ne serait pas la même dans toute son étendue. Si l'on divise cet élément de chaleur par la température correspondante T, et si l'on intègre ensuite l'expression différentielle ainsi obtenue pour toute la série circulaire de changements, l'intégrale devra satisfaire à la condition

$$(\mathrm{II}) \qquad \int \frac{dQ}{T} \leqq 0.$$

Le signe de l'égalité qui figure dans cette expression s'applique aux cas où tous les changements de la série sont *réversibles*, c'est-à-dire susceptibles d'être effectués en sens contraire, tandis que le signe de l'inégalité s'applique aux cas où les changements de la série ne sont pas *réversibles* [*].

[*] Dans mon Mémoire « sur une nouvelle forme du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur » (*Annales de Poggendorff*, t. XCIII, et *Journal de Liouville*, t. XX), où j'ai donné pour la première fois la forme la plus générale de ce théorème, relative à des séries circulaires de changements, j'ai choisi le signe de la différentielle dQ autrement qu'ici, en ce que là un élément de chaleur est regardé comme positif lorsqu'il passe du corps variable dans un réservoir de chaleur, et négatif lorsqu'il est fourni par ce réservoir. En choisissant ce signe, qui est commode dans certaines considérations théoriques générales, il faut écrire la relation (II) comme suit

$$\int \frac{dQ}{T} \geqq 0.$$

Dans le présent Mémoire, les éléments de chaleur reçus par le corps sont partout considérés comme positifs, et ceux qui lui sont soutirés comme négatifs.

§ 2. Nous examinerons maintenant de plus près de quelle manière les grandeurs de l'équation (I_a) se comportent à l'égard des diverses espèces de changements du corps.

L'*œuvre extérieure* w, effectuée pendant que le corps passe d'un état initial donné à un autre état déterminé, dépend non-seulement de ces deux états extrêmes, mais encore de la manière dont s'opère ce changement.

Il faut savoir premièrement si les forces extérieures agissant sur le corps, et qui sont surmontées par les forces propres du corps, ou qui au contraire surmontent celles-ci (d'où vient la distinction de l'œuvre extérieure en positive et négative); il faut savoir, disons-nous, si ces forces extérieures sont à chaque instant égales aux forces propres du corps ou si elles en diffèrent. Dans ce dernier cas, la force surmontante sera naturellement la plus grande. Il est vrai qu'on peut dire qu'une force doit toujours être supérieure à celle qu'elle doit vaincre; mais comme la différence peut être aussi petite qu'on voudra, le cas où elle est nulle, c'est-à-dire où les deux forces sont égales, peut être regardé comme le cas limite, qui doit être considéré comme théoriquement possible, lors même qu'il n'est pas réalisable. Lorsque la puissance diffère de la résistance, le changement a lieu d'une manière non réversible.

Secondement, lorsque l'on pose comme condition que le changement doit être réversible, l'œuvre extérieure dépend encore des états intermédiaires entre les deux états extrêmes, ou, pour s'exprimer plus clairement, de la *voie* par laquelle le corps passe de l'état initial à l'état final.

L'*énergie* U du corps dont l'élément figure dans l'équation (I_a) à côté de celui de l'œuvre extérieure se comporte d'une manière toute différente. Si l'état initial et l'état final du corps sont donnés, la variation de l'énergie est complétement déterminée, sans que l'on ait besoin de savoir comment le corps a passé d'un état à l'autre, vu qu'elle n'est influencée ni par la nature du chemin parcouru, ni par la différence entre les deux modes de changements, réversibles ou non réversibles. Si donc l'état initial du corps et la valeur correspondante de son énergie sont supposés donnés, on peut dire que l'énergie est complétement déterminée par l'état du corps à l'instant considéré.

Quant à la *quantité de chaleur* Q, reçue par le corps pendant le changement d'état, il faut qu'elle dépende du mode de changement de la même manière que l'œuvre extérieure, puisqu'elle est la somme de l'accroissement de l'énergie et de l'œuvre extérieure effectuée.

Maintenant, afin de limiter le champ que nous aurons d'abord à considérer, nous supposerons dans la suite que nous n'ayons à nous occuper que de changements susceptibles d'être effectués dans les deux sens (réversibles), à moins que l'on ne dise expressément que ceux qui ne peuvent être renversés sont aussi compris dans la recherche.

L'équation (I_a), qui est l'expression du premier théorème principal, se rapporte aussi bien aux changements réversibles qu'à ceux qui ne le sont pas. Donc, pour l'appliquer spécialement aux changements de la première espèce, il n'est pas nécessaire de modifier sa forme, mais seulement de convenir que les lettres w et Q représentent l'œuvre extérieure et la quantité de chaleur correspondant à des changements qui ont lieu en mode réversible.

Lorsque l'on veut appliquer l'expression (II) du second théorème principal à des changements réversibles, il faut premièrement convenir que la lettre Q représente la quantité de chaleur correspondant à cette espèce de changements, et ensuite, au lieu du double signe $\leqq$, il faut simplement faire usage de celui de l'égalité. On obtient ainsi, pour une série circulaire de changements réversibles, l'équation

$$(II_a) \qquad \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

§ 3. Afin de pouvoir calculer au moyen des équations (I_a) et (II_a), nous voulons admettre que l'état du corps considéré soit déterminé par des quantités quelconques. Des cas particulièrement fréquents sont ceux où l'état du corps est déterminé par sa température et son volume, ou par sa température et la pression qu'il supporte, ou enfin par son volume et par la pression. Nous ne voulons pas nous borner dès l'abord à deux quantités déjà fixées, mais nous admettrons que l'état du corps soit déterminé par deux quantités quelconques x et y, que nous regarderons comme étant des variables indépendantes. Il est clair que dans telle ou telle application spéciale, nous serons toujours

libre de désigner par l'une de ces variables, ou même par les deux, une ou deux des quantités susnommées, température, volume et pression.

Si les grandeurs x et y déterminent l'état du corps à l'instant considéré, il faut que la grandeur U, l'énergie, puisse être exprimée en fonction de ces deux variables, x et y.

Il n'en est pas de même des grandeurs w et Q. Leurs dérivées, que nous représenterons comme suit :

$$\frac{dw}{dx} = m, \quad \frac{dw}{dy} = n, \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{dx} = M, \quad \frac{dQ}{dy} = N, \tag{2}$$

sont des fonctions déterminées de x et de y. Si l'on convient, par exemple, que la variable x s'accroisse de dx, tandis que la variable y reste constante, et que ce changement du corps soit réversible, il s'agit alors d'un phénomène complétement déterminé, et l'œuvre extérieure effectuée doit aussi être complétement déterminée; il en résulte que la fraction $\frac{dw}{dx}$ doit également avoir une valeur déterminée. Il en est de même lorsque x reste constant, tandis que y s'accroît de dy.

Si donc les dérivées de l'œuvre extérieure sont des fonctions déterminées de x et de y, il faut, d'après l'équation (I_a), que les dérivées de la quantité Q de chaleur reçue par le corps soient aussi des fonctions déterminées de x et de y.

Mais si nous formons les différentielles dw et dQ, qui contiennent dx et dy, en négligeant les termes qui sont d'ordre supérieur relativement à dx et à dy, et en écrivant

$$dw = m\,dx + n\,dy, \tag{3}$$

$$dQ = M\,dx + N\,dy, \tag{4}$$

nous obtenons deux équations différentielles totales, que l'on ne peut pas intégrer tant que les variables x et y restent indépendantes l'une de l'autre, vu que les quantités m et n, M et N, ne satisfont pas à la

condition d'intégrabilité, qui s'écrit dans les deux cas

$$\frac{dm}{dy} = \frac{dn}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Les grandeurs w et Q sont donc au nombre de celles dont il a été question dans l'introduction mathématique à la première partie de ma Collection de Mémoires; elles présentent cette particularité, que leurs dérivées sont des fonctions déterminées des deux variables indépendantes, tandis qu'elles-mêmes ne peuvent pas être exprimées par une fonction semblable, à moins que l'on ne connaisse une autre relation des variables, c'est-à-dire que la *voie* des changements du corps ne soit prescrite.

§ 4. Revenons à l'équation (I_a), dans laquelle nous porterons les valeurs de dw et de dQ données en (3) et (4); puis décomposons également dU en ses deux parties relativement à dx et dy; il vient

$$M\,dx + N\,dy = \left(\frac{dU}{dx} + m\right)dx + \left(\frac{dU}{dy} + n\right)dy.$$

Cette équation, devant être satisfaite pour toute valeur de dx et de dy, se décompose en

$$M = \frac{dU}{dx} + m,$$

$$N = \frac{dU}{dy} + n.$$

Différentions la première de ces équations par rapport à y, et la seconde par rapport à x, nous obtenons

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2U}{dx\,dy} + \frac{dm}{dy},$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2U}{dy\,dx} + \frac{dn}{dx}.$$

Mais en appliquant à U le théorème relatif à toute fonction de deux variables indépendantes : qu'en différentiant successivement par rapport à chacune d'elles, l'ordre de la différentiation est sans influence

sur le résultat, on pourra écrire

$$\frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{d^2U}{dy\,dx}.$$

Si, en tenant compte de cette dernière équation, on retranche les deux précédentes l'une de l'autré, il vient

$$(5) \qquad \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dx}.$$

Nous allons traiter l'équation (II_a) d'une manière analogue. Si nous y remplaçons dQ par sa valeur (4), il vient

$$\int \left(\frac{M}{T}\,dx + \frac{N}{T}\,dy \right) = 0.$$

Pour que cette intégrale s'annule chaque fois que x et y reprennent leurs valeurs initiales, il faut que l'expression placée sous le signe $\int$ soit la différentielle totale d'une fonction de x et y, et il faut par suite que la condition d'intégrabilité rappelée ci-dessus soit satisfaite. Elle sera donc dans ce cas

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{M}{T}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{N}{T}\right).$$

Si l'on effectue maintenant les différentiations, en se rappelant que la température T du corps doit également être considérée comme une fonction de x et de y, on obtient

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{dM}{dy} - \frac{M}{T^2}\cdot\frac{dT}{dy} = \frac{1}{T}\cdot\frac{dN}{dx} - \frac{N}{T^2}\cdot\frac{dT}{dx},$$

ou, ordonné autrement,

$$(6) \qquad \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{1}{T}\left(M\,\frac{dT}{dy} - N\,\frac{dT}{dx} \right).$$

Nous voulons encore modifier quelque peu la forme des équations (5) et (6) que nous venons d'obtenir. Afin de n'avoir pas trop de lettres

différentes dans les formules, nous remplacerons les abréviations M et N par leurs valeurs $\frac{dQ}{dx}$ et $\frac{dQ}{dy}$. Considérons de plus dans l'équation (5) la différence du second membre, dans laquelle nous remplaçons aussi m et n par les coefficients différentiels $\frac{dw}{dx}$ et $\frac{dw}{dy}$; elle devient

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right).$$

La grandeur représentée par cette différence est une fonction de x et de y, que l'on peut ordinairement regarder comme connue; car, les forces extérieures agissant sur le corps étant accessibles à l'observation directe, on peut en déduire l'œuvre extérieure. Comme cette différence se présentera très-souvent dans la suite, nous la nommerons la *différence d'œuvre relative à xy*, et nous la représenterons par un signe particulier

$$\text{(7)} \qquad E_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right).$$

Les équations (5) et (6) deviennent, par suite de ces changements de notation,

$$\text{(8)} \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dy}\right) = E_{xy},$$

$$\text{(9)} \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dQ}{dx} - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dQ}{dy}\right).$$

Ces deux équations sont l'expression analytique des deux théorèmes principaux, relativement à des changements réversibles, lorsque l'état du corps est déterminé au moyen de deux variables quelconques. Une troisième équation résulte immédiatement des deux précédentes; elle est plus simple, en ce qu'elle ne contient que les deux premières dérivées de Q, savoir

$$\text{(10)} \qquad \frac{dT}{dy}\cdot\frac{dQ}{dx} - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dQ}{dy} = TE_{xy}.$$

§ 5. Les trois équations précédentes deviennent excessivement simples si l'on prend la température du corps pour l'une des deux

variables indépendantes. Nous écrirons donc $y = T$, de sorte que les deux variables indépendantes seront la température T, et la grandeur x encore indéterminée. Si $y = T$, il en résulte immédiatement

$$\frac{dT}{dy} = 1.$$

Quant à la dérivée $\frac{dT}{dx}$, on suppose pour la former que, lorsque x devient $x + dx$, l'autre variable désignée jusqu'ici par y reste constante. Comme cette autre variable n'est maintenant pas autre chose que la température T, et qu'on la suppose constante dans la dérivée, il faudra poser

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

Formons d'abord la différence d'œuvre relative à xT; nous trouvons

$$(11) \qquad E_{xT} = \frac{d}{dT}\left(\frac{dw}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dT}\right);$$

en appliquant cette formule aux équations (8), (9) et (10), elles deviennent

$$(12) \qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = E_{xT},$$

$$(13) \qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dx},$$

$$(14) \qquad \frac{dQ}{dx} = TE_{xT}.$$

Si, dans l'équation (12), on remplace la dérivée $\frac{dQ}{dx}$ par le produit TE_{xT}, donné par l'équation (14), et qu'on le différentie par rapport à T, comme cela y est indiqué, on obtient l'équation suivante

$$(15) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = T\frac{dE_{xT}}{dT}.$$

§ 6. Jusqu'ici nous n'avons pas fait de supposition particulière tou-

chant les forces extérieures agissant sur le corps, et auxquelles l'œuvre extérieure effectuée se rapporte. Maintenant, nous considérerons de plus près un cas qui se présente fréquemment : c'est celui où la seule force extérieure existante, ou du moins la seule qui soit assez importante pour entrer dans les calculs, est une pression uniforme et normale à la surface du corps.

Dans ce cas, il n'y a d'œuvre extérieure effectuée que par un changement de volume du corps. Soit p la pression par unité de surface; le *travail* extérieur effectué lorsque le volume v s'accroît de dv est

$$dW = p\,dv,$$

et, par suite, l'*œuvre* extérieure, c'est-à-dire ce travail extérieur mesuré en calories,

$$(16) \qquad dw = A\,p\,dv.$$

Supposons maintenant que l'état du corps soit déterminé par deux variables quelconques x et y; la pression p et le volume v pourront être considérés comme des fonctions de ces deux variables, x et y. Nous pouvons donc écrire l'équation précédente comme suit :

$$dw = A\,p\left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy\right),$$

d'où résulte

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dx} = A\,p\,\dfrac{dv}{dx}, \\ \dfrac{dw}{dy} = A\,p\,\dfrac{dv}{dy}. \end{cases}$$

Si nous substituons ces valeurs de $\frac{dw}{dx}$ et de $\frac{dw}{dy}$ dans l'expression (7), de E_{xy}, et si nous effectuons les différentiations indiquées, en considérant que

$$\frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dy\,dx},$$

nous obtenons

$$(18) \qquad E_{xy} = A\left(\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}\right).$$

Nous avons à appliquer cette valeur de E_{xy} aux équations (8) et (10).

Soient x et T les deux variables indépendantes, nous obtiendrons, comme dans l'équation précédente,

$$E_{x\mathrm{T}} = A\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right). \tag{19}$$

On pourra appliquer cette valeur aux équations (12), (14), (15).

L'expression (18) prend les formes les plus simples, lorsque l'on considère le volume ou la pression comme l'une des variables, ou les deux à la fois comme les deux variables indépendantes. Il est facile de voir que ces suppositions ramènent l'équation (18) aux formes suivantes :

$$E_{vy} = A\,\frac{dp}{dy}, \tag{20}$$

$$E_{py} = -\,A\,\frac{dv}{dy}, \tag{21}$$

$$E_{vp} = A. \tag{22}$$

Enfin, on n'aura qu'à remplacer y par T dans les équations (20) et (21), lorsque l'on voudra choisir la température pour l'une des variables indépendantes, dans les cas où le volume ou la pression joue déjà le rôle de l'autre variable.

§ 7. Dans les circonstances considérées ci-dessus, où la seule force extérieure est une pression superficielle uniforme et normale, les variables indépendantes que l'on choisit le plus souvent pour déterminer l'état du corps sont les grandeurs indiquées à la fin du paragraphe précédent, savoir, le volume et la température, ou bien la pression et la température, ou enfin le volume et la pression. Les fréquentes applications des systèmes d'équations relatifs à ces trois cas, m'engagent à les réunir dans un tableau, lors même qu'on pourrait facilement les déduire des équations précédentes. Le premier système est celui que j'ai toujours appliqué dans mes Mémoires, lorsque j'ai considéré des cas spéciaux.

Si l'on choisit v et T comme variables indépendantes, on obtient

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{dQ}{dv}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dT}\right) = A\,\dfrac{dp}{dT}, \\ \dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{dQ}{dv}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dT}\right) = \dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{dQ}{dv}, \\ \dfrac{dQ}{dv} = AT\,\dfrac{dp}{dT}. \\ \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dT}\right) = AT\,\dfrac{d^2p}{dT^2}. \end{cases}$$

Si l'on prend p et T comme variables indépendantes, on a

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{dQ}{dp}\right) - \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dT}\right) = -A\,\dfrac{dv}{dT}, \\ \dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{dQ}{dp}\right) - \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dT}\right) = \dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{dQ}{dp}, \\ \dfrac{dQ}{dp} = -AT\,\dfrac{dv}{dT}, \\ \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dT}\right) = -AT\,\dfrac{d^2v}{dT^2}. \end{cases}$$

Enfin, si v et p sont choisies comme variables indépendantes, il vient

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dv}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dp}\right) = A, \\ \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dv}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dp}\right) = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{dT}{dp}\cdot\dfrac{dQ}{dv} - \dfrac{dT}{dv}\cdot\dfrac{dQ}{dp}\right), \\ \dfrac{dT}{dp}\cdot\dfrac{dQ}{dv} - \dfrac{dT}{dv}\cdot\dfrac{dQ}{dp} = AT. \end{cases}$$

§ 8. Le plus simple des cas auxquels les équations du paragraphe précédent puissent s'appliquer est celui où le corps donné est un corps homogène et de même température dans toutes ses parties, supportant une pression uniforme et normale sur toute sa surface, et qui, lors d'un changement de pression et de température, peut changer de volume sans modifier son *état d'agrégation* (*Aggregatzustand*).

Dans ce cas, la dérivée $\dfrac{dQ}{dT}$ a une signification physique très-simple.

Supposons en effet que le poids du corps soit égal à l'unité de poids: cette dérivée représente la chaleur spécifique à volume constant ou à pression constante, suivant que l'une ou l'autre de ces quantités est regardée comme constante lors de sa formation.

Dans des cas où les considérations à faire nous obligent à changer souvent de variables indépendantes, et où, par suite, il se présente des dérivées qui ne diffèrent les unes des autres que par les quantités supposées constantes dans la différentiation, dans ces cas, disons-nous, il est commode d'indiquer cette différence par un signe extérieur, afin qu'il ne soit pas nécessaire de toujours l'indiquer en toutes lettres. Je le ferai en mettant la dérivée entre parenthèses, et en écrivant en indice la quantité supposée constante dans la différentiation, et en la surmontant d'un trait horizontal. Les deux dérivées qui représentent la chaleur spécifique à volume constant et à pression constante, s'écriront donc comme suit :

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\bar{v}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\bar{p}}.$$

De plus, chacune des trois grandeurs, température, volume et pression, qui dans le cas présent servent à déterminer l'état du corps, doit être considérée comme fonction des deux autres; on peut donc former les six dérivées suivantes :

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}}, \quad \left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}}; \quad \left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}}, \quad \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\bar{T}}; \quad \left(\frac{dT}{dv}\right)_{\bar{p}}, \quad \left(\frac{dT}{dp}\right)_{\bar{v}}.$$

Dans ces dérivées, on pourrait supprimer les indices qui indiquent la grandeur supposée constante dans chaque différentiation, si l'on convient une fois pour toutes que, des trois grandeurs T, v et p, celle-là est constante qui ne figure pas dans la dérivée. Cependant, dans l'intérêt de la clarté, et parce que dans la suite nous aurons aussi entre les mêmes quantités, des dérivées dans lesquelles la quantité supposée constante sera une autre qu'ici, nous conserverons encore les indices, au moins dans les premières équations suivantes.

On facilite les calculs à effectuer au moyen de ces six dérivées, si l'on détermine d'avance leurs relations mutuelles.

Et d'abord, il est clair que ces six dérivées se groupent en trois

paires réciproques l'une de l'autre. Si nous prenons la quantité v comme constante, les deux autres grandeurs T et p sont telles, que l'une est simplement fonction de l'autre. Il en est de même de T et de v, lorsque p est constant, et de v et de p lorsque T est constant. On devra donc poser

$$(26) \qquad \frac{1}{\left(\frac{dT}{dp}\right)_{\bar{v}}} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}}; \quad \frac{1}{\left(\frac{dT}{dv}\right)_{\bar{p}}} = \left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}}; \quad \frac{1}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}}} = \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\bar{T}}.$$

Afin d'obtenir en outre les relations de ces trois paires de dérivées, nous considérerons p comme fonction de T et de v par exemple; alors on obtient l'équation différentielle totale

$$dp = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}} dT + \left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}} dv.$$

Si nous voulons appliquer cette équation au cas où p est constant, nous aurons à y faire

$$dp = 0 \quad \text{et} \quad dv = \left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}} dT,$$

d'où résulte

$$0 = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}} dT + \left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}} \left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}} dT.$$

Si l'on supprime dT, et si l'on divise encore par $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}}$, on obtient

$$(27) \qquad \left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}} \left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}} \left(\frac{dT}{dp}\right)_{\bar{v}} = -1.$$

On peut, au moyen de cette équation et de celles (26), remplacer chacune des six dérivées par un produit, ou par un quotient de deux autres dérivées.

§ 9. Revenons maintenant à la quantité de chaleur reçue ou donnée par le corps considéré. Désignons la chaleur spécifique du corps à volume constant par c, et la chaleur spécifique à pression constante

par C; nous avons ainsi, supposé que le poids du corps soit égal à l'unité,

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\bar{v}} = c, \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\bar{p}} = C.$$

De plus, en vertu des équations (23) et (24),

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)_{\bar{T}} = AT\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}}, \quad \left(\frac{dQ}{dp}\right)_{\bar{T}} = -AT\left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}}.$$

On en tire les équations différentielles totales qui suivent :

$$(28) \qquad dQ = c\,dT + AT\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}} dv,$$

$$(29) \qquad dQ = C\,dT - AT\left(\frac{dv}{dT}\right)_{p} dp.$$

La relation des deux chaleurs spécifiques c et C résulte immédiatement de la comparaison de ces deux expressions de dQ. La dernière équation, dont les variables indépendantes sont T et p, fournit une nouvelle équation entre les variables T et v. Il n'y a pour cela qu'à considérer p comme fonction de T et de v, et à écrire

$$dp = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}} dT + \left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}} dv.$$

L'équation (29) devient, par suite de la substitution de cette valeur,

$$dQ = \left[C - AT\left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}}\right] dT - AT\left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}}\left(\frac{dp}{dv}\right)_{\bar{T}} dv.$$

Si maintenant, en application de l'équation (27), on remplace le produit de deux dérivées, qui figure au second terme ci-dessus, par une dérivée unique, il vient

$$dQ = \left[C - AT\left(\frac{dv}{dT}\right)_{\bar{p}} \cdot \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}}\right] dT + AT\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\bar{v}} dv.$$

Si l'on compare cette expression de dQ avec celle de l'équation (28),

et si l'on réfléchit que le coefficient de $d\mathrm{T}$ doit être le même dans les deux, on obtient l'équation suivante qui exprime la relation des deux chaleurs spécifiques :

$$(30)\qquad c = \mathrm{C} - \mathrm{AT}\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{p}} \cdot \left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{v}} \cdot$$

La dérivée $\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{p}}$ qui s'y trouve, représente la dilatation du corps par suite de l'élévation de température, et peut dans la règle être considérée comme connue. Ordinairement l'autre dérivée $\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{v}}$ n'est pas connue, pour les solides et les liquides, par suite d'observations directes. Mais on peut poser, d'après (27),

$$\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{v}} = -\frac{\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{p}}}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\bar{\mathrm{T}}}}.$$

La dérivée qui s'y trouve en numérateur est celle dont il vient d'être question ; celle du dénominateur, étant prise avec le signe négatif, représente la diminution de volume sous l'influence d'une augmentation de pression, autrement dit, la compressibilité. On l'a mesurée directement pour un certain nombre de liquides. Quant à la compressibilité des solides, on peut la calculer approximativement au moyen du coefficient d'élasticité. L'équation (30) devient par suite

$$(31)\qquad c = \mathrm{C} + \mathrm{AT}\frac{\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\bar{p}}^{2}}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\bar{\mathrm{T}}}}.$$

Il faut encore remarquer, en appliquant cette équation à des calculs numériques, que l'unité de volume sous-entendue dans les dérivées précédentes est le cube de l'unité de longueur employée dans la détermination du facteur A ; l'unité de pression est celle exercée par une unité de poids répartie uniformément sur l'unité de surface. C'est donc à ces unités qu'il faudra ramener les coefficients de dilatation et

de compressibilité, s'ils se rapportent à d'autres unités, comme cela est le cas ordinaire.

La dérivée $\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\overline{\mathrm{T}}}$ étant toujours négative, il en résulte que la chaleur spécifique du corps à volume constant doit toujours être plus petite que celle à pression constante. L'autre dérivée $\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{p}}$ est en général une grandeur positive. Pour l'eau, elle est nulle à la température du maximum de densité, et par suite ses deux chaleurs spécifiques sont égales à cette température. A toutes les autres températures, tant au-dessus qu'au-dessous du maximum de densité, la chaleur spécifique à volume constant est plus faible que celle à pression constante, car lors même que la dérivée $\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{p}}$ devient négative au-dessous de cette température, ce changement de signe n'a pourtant pas d'influence sur la valeur de la formule, puisque cette dérivée y entre à la seconde puissance.

Les équations (28) et (29) fournissent facilement pour la quantité Q une équation différentielle totale relative aux variables indépendantes p et v. Pour l'obtenir, on n'a qu'à considérer T comme fonction de p et de v, et à poser en conséquence

$$d\mathrm{T} = \left(\frac{d\mathrm{T}}{dp}\right)_{\overline{v}} dp + \left(\frac{d\mathrm{T}}{dv}\right)_{\overline{p}} dv.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (29), il vient

$$\begin{aligned} d\mathrm{Q} &= \left[\mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dp}\right)_{\overline{v}} - \mathrm{AT}\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{p}}\right] dp + \mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dv}\right)_{\overline{p}} dv \\ &= \left(\frac{d\mathrm{T}}{dp}\right)_{\overline{v}} \left[\mathrm{C} - \mathrm{AT}\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{p}}\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{v}}\right] dp + \mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dv}\right)_{\overline{p}} dv. \end{aligned}$$

La différence contenue dans la dernière parenthèse à crochet est égale à c, d'après l'équation (30); on peut donc écrire :

$$(32) \qquad d\mathrm{Q} = c\left(\frac{d\mathrm{T}}{dp}\right)_{\overline{v}} dp + \mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dv}\right)_{\overline{p}} dv.$$

§ **10**. Les trois équations différentielles totales (28), (29) et (32) ne remplissent pas la condition d'intégrabilité immédiate, ce qui, pour les deux premières, résulte déjà des équations posées ci-dessus. En effet, les dernières équations des systèmes (23) et (24) deviennent, si nous y introduisons les lettres c et C,

$$(33)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dc}{dv}\right)_{\overline{T}} = AT\left(\dfrac{d^2p}{dT^2}\right)_{\overline{v}}, \\ \left(\dfrac{dC}{dp}\right)_{\overline{T}} = -AT\left(\dfrac{d^2v}{dT^2}\right)_{\overline{p}}; \end{cases}$$

tandis que les équations qui devraient être satisfaites pour que les équations (28) et (29) fussent intégrables, sont

$$\left(\frac{dc}{dv}\right)_{\overline{T}} = A\left[T\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)_{\overline{v}} + \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\overline{v}}\right],$$
$$\left(\frac{dC}{dp}\right)_{\overline{T}} = -A\left[T\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_{\overline{p}} + \left(\frac{dv}{dT}\right)_{\overline{p}}\right].$$

On prouvera de même, quoique les calculs soient un peu plus longs, que l'équation (32) n'est pas intégrable non plus; cela résulte du reste immédiatement de ce qui précède, puisqu'elle est déduite des équations (28) et (29).

Ces trois équations sont donc au nombre de ces équations différentielles totales traitées dans l'introduction à la première partie de ma Collection de Mémoires; elles ne peuvent être intégrées que si l'on connaît encore une autre relation des variables; il faut donc que la voie des changements éprouvés par le corps soit prescrite d'avance.

Je me bornerai à indiquer ici, comme exemple, une seule des nombreuses applications dont les équations (28), (29) et (32) sont susceptibles. Supposons que le volume du corps varie sous l'influence d'une variation de pression, sans qu'il reçoive ni ne perde de chaleur, et que ce changement soit réversible. On demande quelle variation de volume sera produite dans ces circonstances par une certaine variation de pression, et quelle sera la variation de température, ou, plus généralement, quelles sont les équations qui existeront dans ces circonstances entre la température, le volume et la tension du corps.

On obtient immédiatement ces équations en posant $dQ = 0$ dans les trois équations sus-indiquées. L'équation (28) donne ainsi

$$c\,dT + AT\left(\frac{dT}{dp}\right)_{\overline{v}} dv = 0.$$

Si l'on divise cette équation par dv, la fraction $\frac{dT}{dv}$ que l'on obtient est, dans ce cas particulier, la dérivée de T par rapport à v, que nous distinguerons des autres dérivées de T par rapport à v, en ce que nous écrirons $\overline{Q}$ en indice. On obtient ainsi :

(34) $$\left(\frac{dT}{dv}\right)_{\overline{Q}} = -\frac{AT}{c}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\overline{v}}.$$

On déduit également de l'équation (29)

(35) $$\left(\frac{dT}{dp}\right)_{\overline{Q}} = \frac{AT}{C}\left(\frac{dv}{dT}\right)_{\overline{p}}.$$

L'équation (32) donne d'abord

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\overline{Q}} = -\frac{c}{C}\frac{\left(\frac{dT}{dp}\right)_{\overline{v}}}{\left(\frac{dT}{dv}\right)_{\overline{p}}},$$

d'ou, en vertu de (27),

(36) $$\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\overline{Q}} = \frac{c}{C}\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\overline{T}}.$$

Si l'on substitue encore dans cette équation la valeur de c tirée de (31), on obtient

(37) $$\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\overline{Q}} = \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\overline{T}} + \frac{AT}{C}\left(\frac{dv}{dT}\right)_{\overline{p}}^2.$$

§ **11.** Les équations des paragraphes précédents prennent des formes plus définies et plus simples lorsqu'on les applique à un gaz parfait.

Dans ce cas, on a entre les grandeurs T, v et p, la loi de Mariotte et de Gay-Lussac exprimée par l'équation

$$(38)\qquad pv = \mathrm{RT},$$

dans laquelle R est une constante; il en résulte

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{v}} = \frac{\mathrm{R}}{v}, \quad \left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\overline{p}} = \frac{\mathrm{R}}{p},\\ &\left(\frac{d^2p}{d\mathrm{T}^2}\right)_{\overline{v}} = 0, \quad \left(\frac{d^2v}{d\mathrm{T}^2}\right)_{\overline{p}} = 0. \end{aligned}\right.$$

En réunissant ces équations aux équations (33), on obtient

$$(40)\qquad \left(\frac{dc}{dv}\right)_{\overline{\mathrm{T}}} = 0, \quad \left(\frac{d\mathrm{C}}{dp}\right)_{\overline{\mathrm{T}}} = 0.$$

Il en résulte que les deux chaleurs spécifiques d'un gaz parfait ne peuvent être fonctions que de la température. D'autres considérations, dans lesquelles je ne veux pas entrer ici, permettent de conclure que ces deux chaleurs spécifiques sont aussi indépendantes de la température, et qu'elles sont donc constantes. Ce résultat est confirmé par les recherches expérimentales sur la chaleur spécifique à pression constante, que M. Regnault a faites sur les gaz permanents.

Si l'on applique les deux premières des équations (39) à l'équation (30), qui exprime la relation des deux chaleurs spécifiques, on obtient

$$c = \mathrm{C} - \mathrm{AT}\frac{\mathrm{R}}{p}\cdot\frac{\mathrm{R}}{v},$$

d'où résulte, en vertu de l'équation (38),

$$(41)\qquad c = \mathrm{C} - \mathrm{AR}.$$

Les équations (28), (29) et (32) deviennent, par l'application des deux premières des formules (39),

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathrm{Q} &= c\,d\mathrm{T} + \mathrm{AR}\frac{\mathrm{T}}{v}\,dv,\\ d\mathrm{Q} &= \mathrm{C}\,d\mathrm{T} - \mathrm{AR}\frac{\mathrm{T}}{p}\,dp,\\ d\mathrm{Q} &= \frac{c}{\mathrm{R}}\,v\,dp + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\,p\,dv, \end{aligned}\right.$$

où l'on peut encore, en vertu de (41), remplacer le produit AR par la différence $C - c$. J'ai déjà fait plusieurs applications de ces équations dans mon Mémoire *sur la force motrice de la chaleur, etc.*, ainsi que dans ma Collection de Mémoires, en appendice au Mémoire intitulé : *Sur l'application du théorème de l'équivalence des transformations au travail intérieur.* Je ne m'étendrai donc pas davantage sur ce sujet.

§ **12.** Un autre cas qui présente un intérêt particulier, en raison de ses nombreuses applications, est celui où le changement d'état du corps est accompagné d'une modification partielle de son état d'agrégation.

Nous admettrons qu'une partie du corps se trouve à un certain état d'agrégation, et le reste à un autre état. On peut supposer comme exemple, qu'une partie du corps soit liquide et le reste à l'état de vapeur, et que la densité de cette dernière soit justement celle qu'elle prend au contact du liquide. Les équations à poser comprennent aussi les cas où le corps est en partie solide et en partie liquide, ou en partie solide et en partie gazeux.

Pour plus de généralité, nous ne déterminerons pas davantage les deux états d'agrégation dont il s'agit, et nous nous contenterons de les désigner par le *premier* et le *second* état d'agrégation.

Nous supposons donc qu'une certaine quantité de la matière soit renfermée dans un vase de volume connu, et qu'une partie se trouve au premier état d'agrégation et le reste au second. Ces quantités sont tout à fait déterminées, si les volumes spécifiques de cette matière, aux deux états d'agrégation, sont différents à la même température. Si la partie qui a le volume spécifique le plus considérable augmente, la pression exercée sur les parois du vase, et réciproquement leur réaction sur le corps, augmente aussi ; il arrivera bientôt un point où la pression sera si grande, qu'elle empêchera tout nouveau changement d'agrégation. Lorsque ce point sera atteint, la grandeur des deux parties du corps qui se trouvent à des états d'agrégation différents ne pourra plus varier dans l'intérieur du vase, tant que la température de la masse et son volume, c'est-à-dire la capacité du vase, resteront invariables. Mais si celle-ci augmente, tandis que la température reste constante, la portion du corps qui se trouve à l'état d'agrégation le

plus volumineux pourra s'accoître encore aux dépens de l'autre, jusqu'à ce que la pression où tout nouveau changement d'agrégation devient impossible soit atteinte comme précédemment.

La particularité par laquelle ce cas se distingue des autres résulte de ce qui précède. Si nous déterminons l'état du corps au moyen du volume total de la masse et de sa température, pris comme variables indépendantes, sa pression ne sera point une fonction de ces deux variables, mais de la température seulement. Il en est de même si, au lieu du volume, on prend comme seconde variable indépendante une autre grandeur également susceptible de varier indépendamment de la température, et déterminant l'état du corps conjointement avec celle-ci : la pression ne peut pas en dépendre non plus. Dans ce cas, les deux grandeurs, température et pression, ne peuvent pas être prises simultanément pour les deux variables qui déterminent l'état du corps.

Nous déterminerons donc l'état du corps au moyen de la température T et d'une autre grandeur que nous ne fixerons pas encore, et que nous désignerons par x. Considérons d'abord la différence d'œuvre relative à xT, donnée par l'expression (19),

$$E_{xT} = A\left(\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right).$$

D'après ce qui précède, il faudra y faire $\frac{dp}{dx} = 0$, d'où résulte

$$E_{xT} = A\,\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{43}$$

Les trois équations (12), (13) et (14) deviennent par suite

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = A\,\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}, \tag{44}$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dx}, \tag{45}$$

$$\frac{dQ}{dx} = AT\,\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{46}$$

§ 15. Afin de donner à ces équations des formes mieux caracté-

risées, nous désignerons toute la masse du corps considéré par M; la portion qui a déjà passé au deuxième état d'agrégation par m; celle qui se trouve encore au premier état sera donc $M - m$. Nous prendrons la grandeur m pour la seconde variable indépendante, qui déterminera l'état du corps conjointement avec sa température absolue T.

Désignons par σ le volume spécifique (c'est-à-dire le volume par unité de poids) de la matière au premier état d'agrégation, et par s celui qu'elle a au deuxième état. Ces deux grandeurs se rapportent à la température T et à la pression correspondante, et, comme celle-ci, elles doivent être considérées comme fonctions de la température seulement. Si nous désignons le volume de la masse totale par v, nous aurons

$$\begin{aligned} v &= (M - m)\sigma + ms \\ &= m(s - \sigma) + M\sigma. \end{aligned}$$

Désignons la différence $(s - \sigma)$ par u, il vient

(47) $$v = mu + M\sigma,$$

d'où résulte

(48) $$\frac{dv}{dm} = u.$$

Appelons r la quantité de chaleur qui doit être communiquée à ce corps, pour qu'à la température T, et sous la pression correspondante, une unité de poids passe du premier état d'agrégation au second; il vient

(49) $$\frac{dQ}{dm} = r.$$

Nous voulons en outre introduire la chaleur spécifique de la matière à chaque état d'agrégation dans les calculs. La chaleur spécifique dont il s'agit ici n'est ni celle à volume constant, ni celle à pression constante, mais représente la quantité de chaleur nécessaire à l'échauffement du corps, lorsque sa pression varie avec sa température de la manière exigée par les circonstances du cas considéré. Désignons cette espèce de chaleur spécifique dans les formules suivantes par c

pour le premier état d'agrégation, et par h pour le second [*]. On obtient ainsi

$$\frac{dQ}{dT} = (M - m)c + mh,$$

ou, en ordonnant autrement,

$$(50) \qquad \frac{dQ}{dT} = m(h - c) + Mc.$$

Les équations (49) et (50) donnent immédiatement

$$(51) \qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) = \frac{dr}{dT}, \quad \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = h - c.$$

En substituant les valeurs données par les formules (48) à (51), dans les équations (44), (45) et (46), après y avoir écrit m à la place de x, on obtient

$$(52) \qquad \frac{dr}{dT} + c - h = Au\frac{dp}{dT},$$

$$(53) \qquad \frac{dr}{dT} + c - h = \frac{r}{T},$$

$$(54) \qquad r = ATu\frac{dp}{dT}.$$

Ce sont les équations que j'ai déjà données dans mon premier Mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur, comme étant les équations fondamentales relatives à la formation de la vapeur.

Dans les calculs numériques que j'ai effectués touchant l'évaporation de l'eau, je n'ai pas distingué, pour l'état liquide, la chaleur spécifique à pression constante, de celle dont il s'agit dans ces formules. Ce procédé est tout à fait justifiable, puisque la différence entre ces deux chaleurs spécifiques est moindre que les erreurs d'observation dans leur détermination expérimentale [**].

---

[*] Ainsi, dans les formules suivantes, la lettre c a une autre signification que dans les précédentes, où elle représentait la chaleur spécifique du corps à volume constant.

[**] Si pour l'eau à 100 degrés, par exemple, on calcule (au moyen des équations

Si l'on forme l'équation différentielle totale

$$dQ = \frac{dQ}{dm} dm + \frac{dQ}{dT} dT,$$

et si l'on y substitue les valeurs (49) et (50), il vient

$$dQ = r dm + [m(h - c) + Mc] dT.$$

En mettant donc, pour $h - c$, la valeur qui résulte de (53), on obtient

$$dQ = r dm + \left[m\left(\frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}\right) + Mc\right] dT;$$

cette équation peut aussi être écrite comme suit :

(55) $$dQ = d(mr) - \frac{mr}{T} dT + Mc dT,$$

ou, plus brièvement encore,

(56) $$dQ = T d\left(\frac{mr}{T}\right) + Mc dT.$$

Je ne m'étendrai pas davantage sur les applications de ces équations, puisque je les ai déjà traitées en détail dans mes premiers Mémoires, ainsi que dans celui sur les machines à vapeur.

§ 14. Toutes les considérations précédentes se rapportent à des changements réversibles. Nous voulons encore y faire entrer ceux qu'il n'est pas possible de renverser, afin d'indiquer, au moins en principe, comment il faut les traiter.

---

développées plus haut) la différence entre la chaleur spécifique à pression constante désignée par C, et celle représentée par c dans le texte ci-dessus, on trouve

$$C - c = 0,00026.$$

En admettant donc pour C le chiffre 1,013 donné par M. Regnault comme résultat de ses expériences, on obtient pour c la valeur 1,01274. On voit que ces deux nombres sont si près d'être égaux, que leur différence tombe tout à fait dans les limites des erreurs d'observation.

Les recherches mathématiques sur les changements non réversibles des corps portent surtout sur deux circonstances qui donnent lieu à des déterminations de grandeurs toutes particulières. Premièrement, les quantités de chaleur qu'il faut communiquer au corps, ou lui soustraire pendant des changements non réversibles, sont différentes de celles qu'il faut lui communiquer ou lui soustraire lorsque les mêmes changements ont lieu d'une manière réversible. Secondement, chaque changement non réversible est accompagné d'une transformation non compensée, qu'il importe de connaître dans certaines considérations.

Afin de pouvoir présenter les expressions analytiques relatives à ces deux circonstances, il faut que je commence par appeler l'attention sur quelques grandeurs contenues dans les équations que j'ai établies.

L'une d'elles, relative au premier théorème principal, est l'énergie du corps dont il a déjà été question au commencement de ce Mémoire, et que nous avons désignée par U dans les équations (I) et (I_a). On peut la déterminer au moyen de l'équation (I_a) que l'on peut écrire

$$dU = dQ - dw, \tag{57}$$

ou bien, en intégrant,

$$U = U_0 + Q - w. \tag{58}$$

U_0 représente l'énergie du corps à un état initial arbitraire; Q représente la quantité de chaleur qu'il faut communiquer au corps, et w l'œuvre extérieure effectuée, pendant que le corps passe de l'état initial à l'état actuel, par des changements quelconques qui ont lieu en mode réversible. Comme il a été dit plus haut, ce passage peut s'effectuer par une infinité de voies différentes, lors même qu'on pose la condition que tous les changements successifs doivent être réversibles; et parmi toutes ces voies, on pourra choisir celle qui sera la plus commode dans les calculs.

Une autre grandeur, relative au second théorème principal, qui se trouve dans l'équation (II_a), doit aussi être examinée de plus près. Si, comme cette équation l'indique, l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ doit s'annuler chaque fois que le corps est ramené à l'état initial, quels que soient

les états intermédiaires par lesquels il a passé, il faut que l'expression $\frac{dQ}{T}$ placée sous le signe $\int$ soit la différentielle totale d'une quantité qui ne dépend que de l'état du corps à l'instant considéré, et non de la voie par laquelle il y est arrivé ; désignons-la par S, nous aurons

$$dS = \frac{dQ}{T}; \tag{59}$$

si nous supposons l'intégration effectuée pour une série quelconque de changements réversibles, par lesquels le corps peut passer de l'état initial adopté à son état actuel, nous aurons, en désignant par S_0 la valeur de la quantité S correspondant à cet état initial,

$$S = S_0 + \int \frac{dQ}{T}. \tag{60}$$

Cette équation servira à la détermination de S tout à fait comme l'équation (58) à celle de U.

La signification physique de la grandeur S a déjà été traitée dans mon Mémoire *sur l'application du théorème de l'équivalence des transformations au travail intérieur.* Je transcris ici la seconde équation fondamentale (II) donnée dans ce Mémoire, relative à tous les changements réversibles d'un corps, en y changeant le signe de la quantité de chaleur, c'est-à-dire que maintenant je regarde comme positive, non pas la chaleur qui passe du corps à l'extérieur, mais bien celle qu'il reçoit de l'extérieur :

$$\int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dH}{T} + \int dZ. \tag{61}$$

Les deux intégrales du second membre sont les valeurs relatives au cas qui nous occupe de deux quantités nouvelles introduites dans ce Mémoire-là.

La lettre H de la première intégrale représente la chaleur existant réellement dans le corps; j'ai prouvé qu'elle ne dépend que de sa température, et non de l'arrangement de ses particules. Il en résulte que l'expression $\frac{dH}{T}$ est une différentielle totale, et qu'en l'intégrant rela-

tivement au passage du corps d'un état initial fixé d'avance à l'état actuel, on obtiendra une valeur entièrement déterminée par cet état actuel, sans que le mode de changement du corps doive nécessairement être connu. Des motifs exposés dans ce Mémoire m'ont fait appeler cette grandeur *valeur de transformation* (*Verwandlungswerth*) de la chaleur existant dans le corps.

Quant à l'état initial qui doit servir de point de départ à l'intégration, on pourrait facilement se décider pour celui où H est nul, ce qui reviendrait à placer le point de départ au zéro absolu de la température; mais alors l'intégrale $\int \frac{dH}{T}$ serait infinie. Si donc on veut obtenir une valeur finie, il faut partir d'un état initial, auquel la température a déjà une valeur appréciable; alors l'intégrale ne représentera pas la valeur de transformation de toute la chaleur contenue dans le corps, mais seulement celle de la chaleur qu'il contient de plus à son état actuel qu'à l'état initial; c'est ce que j'ai exprimé en disant que cette intégrale représente *la valeur de transformation de la chaleur du corps comptée à partir de cet état initial*. Pour plus de brièveté, nous désignerons cette grandeur par Y.

J'ai donné le nom de *disgrégation* à la quantité Z qui figure dans la seconde intégrale. Elle dépend de l'arrangement des particules du corps; la mesure d'un accroissement de disgrégation est la valeur d'équivalence de la transformation d'œuvre en chaleur, qui doit avoir lieu pour ramener le corps à l'état primitif, qui peut donc remplacer cet accroissement de disgrégation. On peut donc dire que la disgrégation est la valeur de transformation de l'arrangement actuel des particules du corps. Comme, pour déterminer la disgrégation, il faut aussi partir d'un état initial arbitraire, nous admettrons que ce soit le même que celui dont on est parti en déterminant la valeur de transformation de la chaleur contenue dans le corps.

La grandeur S dont il a été question est la somme des deux grandeurs Y et Z. Considérons de nouveau l'équation (61), et admettons, pour plus de généralité, que l'état initial de la modification du corps à laquelle les intégrales de cette équation se rapportent, ne soit pas nécessairement le même que celui qui a servi à la détermination de Y et de Z, mais qu'il s'agisse d'un changement dont le commencement

soit quelconque, comme cela peut se présenter dans une recherche spéciale. Alors nous pourrons écrire comme suit les intégrales du second membre de cette équation :

$$\int \frac{dH}{T} = Y - Y_0 \quad \text{et} \quad \int dZ = Z - Z_0,$$

Y_0 et Z_0 représentant les valeurs de Y et Z correspondant à l'état initial. L'équation (61) devient ainsi

(62) $$\int \frac{dQ}{T} = Y + Z - (Y_0 + Z_0).$$

Si l'on pose

(63) $$Y + Z = S,$$

et

$$Y_0 + Z_0 = S_0,$$

on obtient l'équation

(64) $$\int \frac{dQ}{T} = S - S_0,$$

laquelle n'est, sous une forme un peu différente, que l'équation (60) servant à déterminer la grandeur S.

Si l'on cherche un nom caractéristique pour la quantité S, on pourrait l'appeler le *contenu de transformation* du corps, exactement comme on a dit que U représente son *contenu de chaleur et d'œuvre*. Mais comme j'estime qu'il vaut mieux tirer des langues anciennes les noms de quantités aussi importantes dans la science, afin qu'on puisse les employer sans modification dans toutes les langues modernes, je propose le nom d'*entropie*, tiré du grec ἡ τροπὴ, la transformation. C'est avec intention que j'ai formé le mot *entropie* aussi semblable que possible au mot *énergie*, vu que les grandeurs ainsi désignées ont une telle parenté, d'après leur signification physique, qu'une certaine analogie m'a paru convenable dans leur dénomination.

Avant d'aller plus loin, récapitulons encore une fois les diverses grandeurs dont il a été question dans ce Mémoire, et qui ont été introduites par la théorie mécanique de la chaleur, ou qui du moins en ont

reçu une signification différente; elles ont toutes cela de commun, qu'elles sont déterminées par l'état actuel du corps, indépendamment de la manière dont il y est parvenu. Ce sont les six suivantes : 1° le *contenu de chaleur;* 2° le *contenu d'œuvre;* 3° leur somme, c'est-à-dire le *contenu de chaleur et d'œuvre* ou l'*énergie;* — 4° la *valeur de transformation du contenu de chaleur;* 5° la *disgrégation,* qu'il faut considérer comme la valeur de transformation de l'arrangement actuel des particules du corps; 6° la somme de ces deux dernières quantités, c'est-à-dire le *contenu de transformation* ou l'*entropie.*

§ 15. Pour déterminer l'énergie et l'entropie dans des cas particuliers, on fera usage des équations (57) et (59) ou (58) et (60), ainsi que des diverses valeurs de dQ données plus haut. Je ne traiterai ici que quelques cas simples en guise d'exemples.

Considérons un corps homogène et de même température dans toutes ses parties, soumis à une pression extérieure uniforme et normale exercée sur toute sa surface; admettons en outre que son poids soit égal à l'unité et que, lors d'une variation de température et de pression, il puisse changer de volume sans éprouver de changement d'état d'agrégation. Dans ces conditions, nous pourrons faire usage des valeurs de dQ données par les équations (28), (29) et (32); § 9. Ces équations contiennent les deux chaleurs spécifiques c et C, à volume et à pression constants. Comme la dernière est ordinairement celle que l'on a déterminée par expérience directe, nous appliquerons l'équation (29) dans laquelle elle se trouve,

$$dQ = C\,dT - AT\frac{dv}{dT}dp \quad [*].$$

Quant à l'œuvre extérieure, on aura pour un changement d'état in-

[*] Je remplace ici le signe $\left(\frac{dv}{dT}\right)_p$, employé dans l'équation (29), simplement par $\frac{dv}{dT}$, en négligeant l'indice, vu que dans le cas où T et p sont les seules variables indépendantes qui entrent en considération, il est clair que si l'on différentie par rapport à T, l'autre variable p est regardée comme constante.

finiment petit, dans lequel le volume varie de dv,

$$dw = \mathrm{A}\, p\, dv.$$

Et si l'on choisit T et p comme variables indépendantes, on pourra écrire cette équation comme suit :

$$dw = \mathrm{A}\, p \left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\, d\mathrm{T} + \frac{dv}{dp}\, dp\right).$$

Si l'on applique ces expressions de $d\mathrm{Q}$ et de dw aux équations (57) et (59), on obtient

$$(65)\qquad \begin{cases} d\mathrm{U} = \left(\mathrm{C} - \mathrm{A}\, p\, \dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\right) d\mathrm{T} - \mathrm{A}\left(\mathrm{T}\, \dfrac{dv}{d\mathrm{T}} + p\, \dfrac{dv}{dp}\right) dp, \\ d\mathrm{S} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}}\, d\mathrm{T} - \mathrm{A}\, \dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\, dp. \end{cases}$$

On reconnaît facilement, au moyen de la dernière des équations (33), savoir

$$\frac{d\mathrm{C}}{dp} = -\,\mathrm{AT}\,\frac{d^2 v}{d\mathrm{T}^2},$$

que ces deux équations différentielles totales sont intégrables sans qu'il soit nécessaire d'admettre encore de nouvelles relations entre les variables. En effectuant l'intégration, on obtient pour U et S des expressions dont chacune ne contient plus qu'une seule constante indéterminée, à savoir la valeur de U ou de S, à l'état initial choisi comme point de départ de l'intégration.

Les équations se simplifient si le corps considéré est un gaz parfait. On peut les obtenir, ou en combinant les équations (65) avec la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, $pv = \mathrm{RT}$; ou bien en substituant, dans les équations (57) et (59), une des valeurs de $d\mathrm{Q}$ obtenues pour les gaz parfaits dans les équations (42), et en y remplaçant en même temps dw par l'une des trois expressions $\mathrm{AR}\,\frac{\mathrm{T}}{v}\,dv$, $\mathrm{AR}\left(d\mathrm{T} - \frac{\mathrm{T}}{p}\,dp\right)$, $\mathrm{A}\,p\,dv$. Si l'on choisit la première des équations (42), qui est la plus commode

dans le cas actuel, il vient

$$(66)\qquad \begin{cases} dU = c\,dT, \\ dS = c\,\dfrac{dT}{T} + AR\,\dfrac{dv}{v}. \end{cases}$$

Ces équations peuvent être intégrées immédiatement, puisque c et AR sont des constantes; en désignant par U_0 et S_0 les valeurs initiales de U et de S, correspondantes à $T = T_0$ et à $v = v_0$, l'on obtient

$$(67)\qquad \begin{cases} U = U_0 + c\,(T - T_0), \\ S = S_0 + c\log\dfrac{T}{T_0} + AR\log\dfrac{v}{v_0}. \end{cases}$$

Nous nous occuperons encore d'un dernier cas spécial, de celui auquel se rapportent les §§ **12** et **13**. Dans ce cas, le corps considéré est une masse M, dont une partie $M - m$ se trouve à un certain état d'agrégation, et dont l'autre partie m se trouve à un état différent, la pression à laquelle toute la masse est soumise ne dépendant que de la température.

Nous supposons que toute la masse M se trouve d'abord au premier état d'agrégation, et qu'elle ait la température T_0, ainsi que la tension correspondante à cette température. Soient de plus U_0 et S_0 les valeurs de l'énergie et de l'entropie du corps à cet état initial. Cela posé, nous voulons admettre que le corps passe de son état initial a son état final de la manière suivante : Il sera d'abord chauffé de T_0 à T, toute la masse restant au premier état d'agrégation; pendant cette première opération, la pression doit varier de telle sorte qu'à chaque instant elle corresponde à la température. Ensuite, à cette température T, une partie m de la masse M passera du premier état d'agrégation au second. Nous considérerons séparément ces deux changements en faisant usage de la notation indiquée dans le § **13**.

Pour le premier changement, à savoir le changement de température, on aura à appliquer l'équation

$$dQ = M\,c\,dT.$$

Le facteur c du second membre représente la chaleur spécifique du

corps au premier état d'agrégation, pour le cas où la pression varie de la manière indiquée pendant le changement de température. D'après la remarque faite au sujet de cette grandeur dans la note du § 15, on peut, sans scrupule, faire usage de la chaleur spécifique à pression constante du corps liquide ou solide, lorsque le premier état d'agrégation est l'état liquide ou l'état solide, et le second l'état gazeux. Ce n'est que lorsqu'il s'agit de températures très-élevées, où la tension de la vapeur augmente très-rapidement avec la température, que la différence entre la chaleur spécifique c et celle à pression constante peut devenir assez sensible pour qu'il faille en tenir compte dans des calculs numériques. Comme l'accroissement de températui e $d\text{T}$ produit un accroissement de volume $\text{M}\frac{d\sigma}{d\text{T}}d\text{T}$, correspondant à une œuvre extérieure exprimée par $\text{MA}\,p\frac{d\sigma}{d\text{T}}d\text{T}$, il résulte de l'équation précédente

$$d\text{U} = \text{M}\left(c - \text{A}p\frac{d\sigma}{d\text{T}}\right)d\text{T},$$

$$d\text{S} = \text{M}\frac{c}{\text{T}}d\text{T}.$$

On a, pour le changement d'état d'agrégation qui se produit à la température T,

$$d\text{Q} = r\,dm.$$

Comme un accroissement dm de la masse au deuxième état d'agrégation produit un accroissement de volume udm, et par suite une œuvre extérieure représentée par $\text{A}pudm$, il vient

$$d\text{U} = (r - \text{A}pu)\,dm;$$

pour remplacer la quantité u par une autre quantité mieux déterminée par l'expérience, appliquons l'équation (54), d'après laquelle on a

$$\text{A}u = \frac{r}{\text{T}\frac{dp}{d\text{T}}}:$$

il vient

$$d\text{U} = r\left(1 - \frac{p}{\text{T}\frac{dp}{d\text{T}}}\right)dm.$$

En même temps l'expression de dQ donne pour dS

$$dS = \frac{r}{T} dm.$$

Les deux équations différentielles relatives au premier phénomène doivent être intégrées par rapport à T, de T_0 jusqu'à T, et les deux dernières, qui se rapportent au second phénomène, par rapport à m, de o jusqu'à m; on obtient ainsi

$$(68)\quad \begin{cases} U = U_0 + M \displaystyle\int_{T_0}^{T} \left(c - Ap\frac{d\sigma}{dT}\right) dT + mr\left(1 - \frac{p}{T\frac{dp}{dT}}\right) \\ S = S_0 + M \displaystyle\int_{T_0}^{T} \frac{c}{T} dT + \frac{mr}{T}. \end{cases}$$

§ **16**. Admettons maintenant que les quantités U et S aient été déterminées, pour les divers états d'un corps, par l'une des méthodes précédentes; les équations relatives aux changements non réversibles pourront être écrites immédiatement.

La première équation fondamentale (I_a) et l'équation (58), qui en a été tirée par intégration, et que nous écrirons comme suit :

$$(69)\qquad Q = U - U_0 + w,$$

se rapportent aussi bien aux changements non réversibles qu'aux changements réversibles. La différence ne consiste qu'en ce que l'œuvre extérieure w, qui se trouve dans le second membre, a une valeur différente dans le cas d'un changement non réversible que dans celui où le même changement a lieu d'une manière réversible. Il n'y a pas de différence pareille à signaler touchant la différence $U - U_0$, dont la valeur ne dépend que des états extrêmes du corps, et non du mode de passage. Il n'est donc nécessaire de tenir compte de ce mode de passage qu'autant qu'il le faut pour déterminer l'œuvre extérieure effectuée pendant ce changement d'état; en ajoutant cette œuvre extérieure à la différence $U - U_0$, on obtient la quantité de chaleur cherchée que le corps doit recevoir pendant son changement.

Quant à la *transformation non compensée* qui se produit lors d'un changement non réversible, on l'obtient de la manière suivante.

L'expression de la transformation non compensée N qui peut se produire dans une *série circulaire* de changements est donnée dans l'équation (11) de mon Mémoire « sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur » [*]. Si nous changeons dans cette équation le signe de la différentielle dQ, parce qu'ici nous considérons comme positive non pas la chaleur passant du corps à l'extérieur, mais bien celle qu'il reçoit de l'extérieur, elle devient

$$(70) \qquad N = -\int \frac{dQ}{T}.$$

Si maintenant le corps éprouve un ou plusieurs changements ne constituant pas une série circulaire, mais amenant le corps à un état final différent de son état initial, on pourra en faire une série circulaire après coup, en ajoutant des changements qui ramènent le corps de l'état final qu'il a atteint à son état initial. Nous admettrons que les changements ajoutés soient effectués d'une manière réversible.

Si nous appliquons l'équation (70) à cette série circulaire de changements, nous pourrons séparer l'intégrale qui s'y trouve en deux parties, la première se rapportant aux changements donnés qui amènent le corps de l'état initial à l'état final, tandis que la seconde sera relative aux changements que nous avons ajoutés pour ramener le corps de l'état final à l'état initial. Nous écrirons ces deux parties en deux intégrales séparées, et nous distinguerons la seconde, relative au retour, par l'indice r placé sous le signe de l'intégration. L'équation (70) devient ainsi

$$N = -\int \frac{dQ}{T} - \int_r \frac{dQ}{T}.$$

Le retour s'effectuant d'une manière réversible, nous pouvons appliquer l'équation (64) à la deuxième intégrale, avec cette seule différence que si S_0 désigne l'entropie de l'état initial, et S celle de l'état final, il faudra changer le signe de la différence $S - S_0$, et écrire $S_0 - S$,

---

[*] *Annales de Poggendorff*, t. XCIII, p. 499; Collection de mes Mémoires, première partie, p. 145; *Journal de Liouville*, t. XX, p. 79.

parce que l'intégrale en question doit être prise en sens contraire, de l'état final à l'état initial. Nous avons donc à écrire

$$\int_r \frac{dQ}{T} = S_0 - S.$$

L'équation précédente devient, par suite de cette substitution,

$$N = S - S_0 - \int \frac{dQ}{T}. \tag{71}$$

La grandeur N déterminée de cette manière représente premièrement la transformation non compensée produite dans toute la série circulaire de changements. Mais comme la somme des transformations produites par des changements réversibles est égale à zéro, qu'ainsi ils ne donnent lieu à aucune transformation non compensée, le retour supposé réversible n'augmente en rien la transformation de cette espèce, et la grandeur N représente par conséquent la transformation non compensée que l'on cherche, produite pendant le passage du corps de l'état initial à l'état final. La différence $S - S_0$, qui figure dans l'expression obtenue, est entièrement déterminée si les deux états extrêmes sont donnés; ce n'est que dans la formation de l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ qu'il faut tenir compte de la manière dont le corps a passé d'un état à l'autre.

§ **17**. Pour terminer, qu'il me soit encore permis de dire quelques mots sur une question qui, il est vrai, ne peut être traitée ici d'une manière complète, parce que les développements nécessaires seraient beaucoup trop étendus. Je crois cependant que le court exposé que je vais en faire ne sera pas dépourvu d'intérêt, vu qu'il peut contribuer à faire ressortir l'importance générale des quantités que j'ai introduites en formulant le second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur.

Dans la forme que je lui ai donnée, ce second théorème exprime en somme que toutes les transformations qui ont lieu dans la nature peuvent se produire d'elles-mêmes, c'est-à-dire sans compensation, dans un certain sens que j'ai regardé comme positif, mais qu'elles ne

peuvent s'effectuer dans le sens contraire ou négatif, que lorsqu'elles sont compensées par d'autres transformations positives et simultanées. L'application de ce théorème à l'univers entier conduit à une conclusion sur laquelle M. Thomson a déjà appelé l'attention [*], et dont j'ai parlé dans un Mémoire publié récemment [**]. Si, dans tous les changements d'état qui se produisent dans l'univers, les transformations effectuées dans un certain sens surpassent celles qui se produisent en sens contraire, il faut que l'état de l'univers se modifie de plus en plus dans le premier sens, c'est-à-dire qu'il tende d'une manière continue vers un état limite.

Il s'agit maintenant de savoir comment on peut définir cet état limite d'une manière simple et pourtant caractéristique. On peut y arriver en considérant, ainsi que je l'ai fait, les transformations comme des grandeurs mathématiques dont on peut calculer les valeurs d'équivalence, et que l'on peut réunir en une somme par addition algébrique.

Dans mes précédents Mémoires, j'ai fait des calculs de cette espèce relativement à la chaleur existant dans les corps, et à l'arrangement des particules du corps. Il en est résulté pour chaque corps deux grandeurs, la valeur de transformation de son contenu de chaleur et sa disgrégation, dont la somme constitue son entropie. Mais ainsi le sujet n'est pas épuisé, car il faut encore étendre les considérations à la chaleur rayonnante, ou, en d'autres termes, à la chaleur répandue dans l'espace sous la forme des mouvements ondulatoires de l'éther, et enfin à d'autres mouvements que l'on ne peut pas comprendre sous le nom de chaleur.

On en finirait rapidement avec ces derniers, pour autant du moins qu'il s'agit de mouvements de masses pondérables, vu que des considérations simples conduisent à la conclusion suivante : Si une masse (assez grande pour qu'en lui comparant un atome celui-ci puisse être considéré comme infiniment petit) se meut d'une seule pièce, la valeur de transformation de ce mouvement peut être considérée de même comme infiniment petite relativement à sa force vive; d'où il résulte

---

[*] *Philosophical Magazine*, 4e série, t. IV, p. 304.

[**] *Annales de Poggendorff*, t. CXXI, p. 1, et Collection de mes Mémoires, première partie, Mémoire VIII.

que si un mouvement pareil se transforme en chaleur par suite d'une résistance passive quelconque, la valeur d'équivalence de la transformation non compensée produite par ce phénomène est simplement représentée par la valeur de transformation de la chaleur produite. La chaleur rayonnante ne peut pas être traitée aussi brièvement, parce qu'il faut encore recourir à certaines considérations particulières pour pouvoir indiquer de quelle manière on peut déterminer sa valeur de transformation. Quoique j'aie déjà parlé de la chaleur rayonnante au point de vue de la théorie mécanique de la chaleur dans le Mémoire publié récemment, que j'ai cité tout à l'heure, je n'y ai pourtant pas abordé la question dont il s'agit ici, vu que je n'avais qu'à établir qu'il n'y a point de contradiction entre les lois de la chaleur rayonnante et un principe que j'ai admis dans la thermodynamique. Je me réserve pour plus tard de faire de la thermodynamique, et surtout du théorème de l'équivalence des transformations, une application spéciale à la chaleur rayonnante.

Pour le moment, je me bornerai à indiquer un résultat que l'on peut exprimer comme suit : Si l'on suppose qu'en tenant compte de toutes les circonstances, on ait formé pour l'univers entier la grandeur que j'ai nommée *entropie* relativement à chaque corps particulier, et si l'on applique en même temps l'autre idée plus simple de l'*énergie*, on pourra exprimer comme suit les deux lois fondamentales de l'univers, qui correspondent aux deux théorèmes principaux de la théorie mécanique de la chaleur :

1. *L'énergie de l'univers est constante.*
2. *L'entropie de l'univers tend vers un maximum.*

SUR L'EXISTENCE D'UNE CAUSE NOUVELLE

ayant une influence sensible sur la valeur de l'équation séculaire de la Lune;

PAR M. DELAUNAY.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI, séance du 11 décembre 1865.

L'uniformité du mouvement de rotation de la Terre, ou, ce qui revient au même, la constance de la durée du jour sidéral, a été admise jusqu'à présent par tous les astronomes. C'est sur cette uniformité de la rotation de notre globe qu'est basée la mesure du temps en Astronomie. On s'est bien préoccupé, il est vrai, de l'influence que la variabilité du jour sidéral pourrait avoir sur les théories astronomiques; on a même signalé certaines causes qui pourraient produire cette variabilité, telles que le refroidissement progressif de la Terre, d'où résulterait une accélération de son mouvement de rotation, et la résistance de l'éther au milieu duquel la Terre tourne, résistance qui amènerait au contraire un ralentissement de ce mouvement. Mais toutes les particularités des mouvements des corps célestes ayant pu être expliquées sans l'intervention de la variabilité de la durée prise pour unité de temps, on avait été conduit à admettre que cette variabilité n'existait pas, ou du moins qu'elle était trop petite pour donner lieu à des conséquences appréciables. C'est ainsi que Laplace dit [*] : « Il est donc certain que, depuis Hipparque, la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde » (centésimale). Puis il ajoute : « Si par des causes quelconques inconnues cette durée éprouvait quelque

[*] *Mécanique céleste*, t. V, p. 362.

altération sensible, on le reconnaîtrait par le mouvement de la Lune, dont les observations, d'ailleurs si utiles, acquièrent par cette considération une nouvelle importance. »

Il est aisé de se rendre compte de la modification apparente qu'éprouverait le mouvement de la Lune autour de la Terre, si la durée du jour sidéral était affectée, par exemple, d'une augmentation progressive, par suite d'un ralentissement du mouvement de rotation de la Terre. Le jour sidéral se trouvant plus long maintenant qu'à l'époque des anciennes observations, la Lune parcourrait, pendant la durée agrandie de ce jour, une portion de son orbite plus grande que celle qu'elle aurait parcourue pendant le même jour s'il avait conservé la valeur qu'il avait anciennement. De sorte que, pour l'astronome qui ferait abstraction de l'augmentation de la durée du jour sidéral, la Lune semblerait parcourir dans le même temps un plus long chemin sur son orbite, c'est-à-dire que son mouvement autour de la Terre paraîtrait se faire plus rapidement. Une accélération apparente du moyen mouvement de la Lune serait donc la conséquence naturelle de l'augmentation progressive de la durée du jour sidéral. Il est bien clair que la Lune n'est pas le seul astre dont le mouvement semblerait modifié par une variation dans la durée que nous prenons pour unité de temps : tous les autres astres éprouveraient une modification analogue dans leurs mouvements. Mais cette modification doit être évidemment d'autant plus grande que le mouvement de l'astre est plus rapide; et c'est pour cette raison qu'une pareille altération de la durée du jour sidéral se manifesterait surtout dans le mouvement de la Lune.

La question de l'équation séculaire de la Lune, qui, comme on sait, a tant préoccupé les astronomes dans ces derniers temps, a ramené l'attention sur la possibilité d'une variation du jour sidéral. On se souvient que Halley, en comparant les observations modernes aux anciennes, a signalé l'existence d'une accélération séculaire dans le moyen mouvement de la Lune; que Laplace a reconnu que cette accélération séculaire de la Lune était due à la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre; que la valeur de l'équation séculaire de la Lune, produite par la cause que Laplace avait trouvée, a été regardée pendant longtemps comme présentant un suffisant accord

avec les indications fournies par les observations; que récemment M. Adams, en rectifiant le calcul de l'équation séculaire due à cette cause, a montré que la vraie valeur de cette équation séculaire est notablement plus petite qu'on ne l'avait cru avant lui; que le résultat obtenu par M. Adams, vivement attaqué à diverses reprises, a été, par suite même de ces attaques, confirmé de la manière la plus complète par les recherches de divers savants employant pour cela des méthodes essentiellement différentes; que cependant une valeur de l'équation séculaire de la Lune, à peu près double de celle que produit la cause assignée par Laplace, a été soumise au contrôle des anciennes éclipses dont il est fait mention dans l'histoire, et qu'il en est résulté de fortes raisons de croire que cette valeur plus grande de l'équation séculaire de la Lune est bien celle qui doit être attribuée à notre satellite pour être complétement d'accord avec l'observation. S'il est vrai que, conformément à ce que je viens de rappeler, l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune indiquée par les observations soit notablement plus grande que celle qu'occasionne la variation de l'excentricité de l'orbite de la Terre, il devient nécessaire de chercher une nouvelle cause à laquelle on puisse attribuer la partie excédante de l'accélération séculaire dont il s'agit, c'est-à-dire la partie dont la cause trouvée par Laplace ne peut pas rendre compte. Si l'on pense pour cela à une variation de la durée du jour sidéral, il ne peut être question que d'une augmentation de cette durée, c'est-à-dire d'un ralentissement du mouvement de rotation de la Terre. Le refroidissement progressif du globe terrestre ne peut pas nous fournir la solution de la question, puisque ce refroidissement produirait un effet tout opposé.

Bien que je ne fusse pas entièrement convaincu que la valeur (6",11) de l'équation séculaire de la Lune, due à la cause que Laplace a trouvée, fût réellement incompatible avec les anciennes éclipses historiques, ainsi que je l'ai expliqué dans mon *Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune*, inséré dans la *Connaissance des Temps de* 1864, j'ai beaucoup réfléchi à la manière dont on pourrait expliquer le désaccord entre la théorie et l'observation, en admettant que ce désaccord fût complétement mis hors de doute. Je suis heureux de pouvoir annoncer aujourd'hui à l'Académie que j'ai réussi à découvrir une

nouvelle cause à laquelle il est très-naturel d'attribuer la portion de l'accélération lunaire qui n'est pas produite par la cause assignée par Laplace. Cette cause nouvelle que j'ai trouvée détermine un ralentissement progressif du mouvement de rotation de la Terre, et par suite occasionne une accélération apparente du moyen mouvement de la Lune. Voici en quoi elle consiste.

On sait que la Lune, par son action sur les eaux de la mer, détermine dans ces eaux un mouvement d'oscillation qui constitue le phénomène des *marées*. Le Soleil concourt à la production de ce phénomène; mais je n'en parlerai pas, afin d'éviter une complication inutile. La forme de la surface de la mer changeant ainsi continuellement, il en résulte que l'action de la Lune sur la masse entière de la Terre (en y comprenant les eaux de la mer) est à chaque instant un peu différente de ce qu'elle serait si le phénomène des marées n'existait pas; en cherchant à se rendre compte de la différence, on reconnaît qu'*elle consiste principalement en un couple qui agit constamment sur la Terre, en sens contraire de son mouvement de rotation,* d'où résulte nécessairement une diminution progressive de la vitesse angulaire du globe terrestre. C'est ce que je vais tâcher de faire comprendre.

Imaginons d'abord que la Terre soit entièrement recouverte par les eaux de la mer. En vertu de l'action de la Lune, les eaux tendent à s'élever au-dessus de leur niveau moyen, dans les deux régions opposées situées aux extrémités du diamètre terrestre qui est dirigé vers le centre de la Lune. Admettons, pour simplifier le langage, que, sans cette action de la Lune, la surface de la mer serait exactement sphérique, et supposons de plus que la Lune soit sur l'équateur céleste; en vertu de l'action lunaire, la surface de la mer tend à prendre à chaque instant la forme d'un ellipsoïde de révolution de même centre que la sphère, ayant son axe dirigé suivant la ligne qui va du centre de la Terre au centre de la Lune. Le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même fait que cet ellipsoïde, suivant lequel les eaux de la mer tendent à chaque instant à se mettre en équilibre, tourne par rapport au globe terrestre exactement comme la Lune dans son mouvement diurne, puisque son axe prolongé va toujours passer par le centre de la Lune. Mais ce déplacement continuel de l'ellipsoïde d'équilibre dont nous venons de parler fait que la surface des eaux de la mer ne

vient jamais coïncider avec lui; les frottements et résistances de toutes sortes que les eaux éprouvent dans leur mouvement, font que la surface allongée que présente à chaque instant l'ensemble de ces eaux est constamment *en retard* sur la position de l'ellipsoïde d'équilibre avec lequel elle tend à coïncider. Sans ce retard, la pleine mer aurait lieu partout au moment du passage de la Lune au méridien, supérieur ou inférieur; en vertu de ce retard dû aux résistances que les eaux ont à vaincre, la pleine mer n'arrive pas au moment même du passage de la Lune au méridien, mais bien quelque temps après ce passage.

Si nous passons du cas hypothétique où nous nous sommes placés au cas de la nature où les eaux de la mer ne recouvrent que partiellement la surface du globe terrestre, nous trouverons une grande différence. Les mers étant toutes en communication les unes avec les autres (il ne s'agit bien entendu que des grandes mers), la surface ellipsoïdale d'équilibre dont nous avons parlé reste la même; mais la présence des continents interposés entre ces mers, en gênant considérablement le mouvement en vertu duquel les eaux tendent à se disposer suivant cette surface ellipsoïdale, change complétement la forme que la surface des eaux prend à chaque instant; au lieu d'une figure d'ensemble allongée comme l'ellipsoïde d'équilibre avec lequel elle tend à coïncider, on a une figure très-irrégulière résultant des mouvements d'oscillation que la Lune produit dans les diverses parties de l'Océan, et qui se combinent les uns avec les autres par la propagation successive de chacun de ces mouvements partiels dans les mers environnantes. Mais quelle que soit l'irrégularité d'ensemble que présente la surface totale des eaux répandues sur le globe terrestre, l'existence des frottements et des résistances de toutes sortes que les eaux éprouvent dans leurs mouvements amène un résultat analogue à celui que nous avons indiqué dans le cas simple que nous avons examiné tout d'abord. Ce mouvement oscillatoire général présente dans tous ses détails un certain retard sur ce qu'il serait sans l'existence des résistances dont nous venons de parler : si l'on s'en tient aux traits généraux, c'est pour ainsi dire le mouvement oscillatoire que prendrait la mer, si ces résistances n'existaient pas, et que la Lune fût placée dans le ciel d'une certaine quantité en arrière de la position qu'elle occupe réellement, eu égard au sens de son mouvement diurne apparent.

Revenons au cas simple où la mer recouvre la Terre de toutes parts, et voyons comment l'action de la Lune sur la masse totale de la Terre est modifiée par suite de la forme allongée que cette même action de la Lune fait prendre à la surface de la mer. En vertu de cette forme, il existe comme deux protubérances liquides situées vers les extrémités d'un diamètre terrestre qui se dirige, non pas vers la Lune même, mais vers un point du ciel situé à une certaine distance de cet astre, du côté de l'orient. Ces deux protubérances sont inégalement éloignées de la Lune; l'une d'elles est plus près de ce corps attirant que le centre de la Terre, et l'autre en est au contraire plus éloignée. Si l'on se reporte à la manière dont on obtient la portion de l'action lunaire qui occasionne le phénomène des marées, on verra que la première de ces protubérances est comme attirée par la Lune, et la seconde, au contraire, comme repoussée par le même astre : il en résulte donc un couple appliqué à la masse du globe terrestre, et tendant à le faire tourner en sens contraire du sens dans lequel il tourne réellement, couple qui doit produire d'après cela un ralentissement dans la rotation de ce globe [*].

Imaginons, pour fixer les idées, que le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien soit de trois heures, ce qui exige que le diamètre aux deux extrémités duquel sont les deux protubérances liquides fasse un angle de 45 degrés avec la ligne allant du centre de la Terre au centre de la Lune, et calculons l'effet que produira le couple dont nous venons de parler, en remplaçant les deux protubérances liquides par deux points matériels situés aux deux extrémités du diamètre oblique qui leur correspond.

---

[*] J'apprends que cette idée d'une résistance que la Lune oppose continuellement au mouvement de rotation de la Terre, par suite de son action sur les eaux de la mer, a déjà été formulée dans certains ouvrages imprimés. Il y est dit en même temps que l'effet produit par cette résistance est trop petit pour être sensible. Je ferai remarquer à cette occasion que la Note que j'ai lue à l'Académie a eu pour objet, non pas de faire connaître cette cause du ralentissement de la rotation de la Terre, mais bien de montrer : 1° que le ralentissement qui en résulte est loin d'être insensible; 2° qu'on peut y voir l'explication complète de la partie de l'équation séculaire de la Lune dont la cause assignée par Laplace ne peut rendre compte.

Désignons par T le centre de la Terre; par L le centre de la Lune; par E l'extrémité du rayon de l'équateur terrestre faisant un angle de 45 degrés avec la ligne TL, du côté de l'orient; et par E' le point diamétralement opposé de cet équateur. Soient M la masse totale de la Terre, m la masse de la Lune, et μ celle de chacun des points matériels que nous supposons placés en E et en E'. Soient en outre R la distance TL supposée constante du centre de la Terre au centre de la Lune, r le rayon terrestre TE ou TE', et d la distance LE de la Lune au point E. Si nous appelons f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance, nous aurons

$$\frac{fm\mu}{d^2}$$

pour l'attraction de la Lune sur le point matériel de masse μ placé en E. Pour rapporter le mouvement du globe terrestre à des axes de directions constantes passant par son centre de gravité, nous devons joindre à la force précédente la force d'inertie d'entraînement de la masse μ, force d'inertie qui a pour expression

$$\frac{fm\mu}{R^2}$$

et qui est dirigée parallèlement à la ligne LT, dans le sens indiqué par l'ordre des deux lettres L, T. Nous avons d'ailleurs

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos 45^\circ = R^2 + r^2 - \sqrt{2}\,Rr.$$

C'est la résultante des deux forces dont nous venons de donner l'expression qui constitue l'action relative de la Lune sur la masse μ placée en E. Si nous prenons la somme des moments de ces deux forces par rapport au centre de la Terre, nous trouverons

$$\frac{3}{2}\frac{fm\mu r^2}{R^3},$$

en négligeant des termes petits par rapport à celui-là. Ce moment tend à faire tourner la Terre dont la masse μ fait partie, d'orient en

occident, c'est-à-dire en sens contraire du mouvement de rotation dont la Terre est animée. Une expression exactement pareille représentera le moment analogue et de même sens relatif à la seconde masse μ placée en E'. Le moment total, dû à l'action de la Lune sur ces deux masses μ placées en E et en E', et tendant à ralentir le mouvement de rotation du globe terrestre, a donc pour valeur

$$3\,\frac{fm\mu r^2}{R^3};$$

et par suite l'équation différentielle de ce mouvement de rotation est

$$\frac{d\omega}{dt} = -\,3\,\frac{fm\mu r^2}{IR^3},$$

en appelant ω la vitesse angulaire de la Terre, et I le moment d'inertie de la masse terrestre par rapport à un de ses diamètres. Admettons pour simplifier que la Terre soit homogène, et nous aurons

$$I = \frac{2}{5}\,Mr^2.$$

Remarquons en outre que, par la considération du mouvement de la Lune autour de la Terre, on a, en négligeant m par rapport à M,

$$f = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M},$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et T la durée de la révolution sidérale de la Lune. Si nous introduisons ces valeurs de I et f dans notre équation différentielle, elle deviendra

$$\frac{d\omega}{dt} = -\,30\,\frac{\pi^2}{T^2}\cdot\frac{m}{M}\cdot\frac{\mu}{M}.$$

On en déduit immédiatement, par une double intégration, que l'angle total dont la Terre tourne pendant un temps quelconque t est plus petit qu'il ne serait sans cette action de la Lune sur les deux masses μ,

d'une quantité A donnée par l'expression

$$A = 15\pi^2 \frac{m}{M} \cdot \frac{\mu}{M} \cdot \frac{t^2}{T^2}.$$

Cherchons maintenant quelle valeur il faudrait attribuer à chacune de ces masses μ pour que le retard A dans la rotation du globe terrestre, correspondant à un temps t égal à un siècle, donnât lieu à une accélération séculaire apparente de la Lune égale à 6 secondes (c'est à peu près la valeur de la portion de l'équation séculaire de la Lune dont la cause trouvée par Laplace ne peut rendre compte). Il faut pour cela supposer A égal à l'angle dont la Terre tourne sur elle-même, pendant que la Lune s'avance de 6 secondes dans son mouvement moyen autour de la Terre; A sera donc égal à 6 secondes multiplié par $27\frac{1}{3}$, ou à 164 secondes. En faisant le calcul, dont il est inutile de donner ici les détails, et adoptant $\frac{1}{80}$ pour le rapport de la masse de la Lune à la masse de la Terre, on trouve

$$\mu = \frac{1}{4160\,000\,000} M.$$

Pour mieux saisir la grandeur de cette masse μ, imaginons que ce soit la masse d'un certain volume V d'eau, et cherchons la valeur de ce volume en mètres cubes. En adoptant 5,5 pour la densité moyenne de la Terre, on trouvera sans peine

$$V = 1\,429\,000\,000\,000 \text{ mètres cubes.}$$

Concevons enfin que cette masse d'eau de volume V ait la forme d'une couche plane à base circulaire d'une épaisseur uniforme de 1 mètre, et nous verrons que le rayon de la base de cette couche sera d'environ 675 kilomètres; c'est-à-dire qu'une pareille couche, appliquée sur la surface du globe terrestre, y occuperait une largeur d'environ 12 degrés de l'équateur. Les proportions de cette couche d'eau sont évidemment comparables à celles des protubérances liquides que l'action de la Lune produirait dans le cas hypothétique où nous nous sommes placés.

En présence d'un pareil résultat, bien qu'il ait été obtenu dans une hypothèse qui diffère beaucoup de la réalité, il est impossible de ne pas admettre qu'un effet analogue, d'une grandeur sensible, soit produit par l'action de la Lune sur les eaux de l'Océan.

Le Soleil, qui contribue pour sa part à la production du phénomène des marées, quoique dans une proportion moindre que la Lune, doit également contribuer à cette diminution progressive de la vitesse de rotation de la Terre.

D'après les explications dans lesquelles nous venons d'entrer, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Les forces perturbatrices auxquelles sont dues les oscillations périodiques de la surface des mers (phénomène des marées), en exerçant leur action sur les intumescences liquides qu'elles occasionnent, déterminent un ralentissement progressif du mouvement de rotation de la Terre, et produisent ainsi une accélératoin apparente sensible dans le moyen mouvement de la Lune.

Le résultat auquel nous venons de parvenir est en désaccord avec ce que Laplace a trouvé en cherchant l'influence que l'état de fluidité des eaux de la mer peut avoir sur le mouvement du globe terrestre considéré dans son ensemble. Laplace dit formellement que cet état de fluidité de la mer n'altère pas l'uniformité du mouvement de rotation du globe (*Mécanique céleste,* livre V). Mais il faut remarquer que, pour arriver à cette conséquence, Laplace s'en tient aux quantités qui sont du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices considérées : il lui était donc impossible de trouver le ralentissement du mouvement de rotation dont nous venons d'établir l'existence réelle, puisque ce ralentissement est évidemment de l'ordre du carré des forces perturbatrices dont il s'agit.

Pour pouvoir calculer exactement la valeur de ce ralentissement progressif de la rotation de la Terre, dû aux actions combinées de la Lune et du Soleil sur les eaux de la mer, il faudrait posséder une connaissance complète de toutes les circonstances que présente le phénomène des marées, non-seulement le long des côtes, mais encore pour tous les points de la surface des mers. Ce calcul direct est à peu près impossible à réaliser. Ce n'est donc que par un moyen détourné que l'on peut espérer obtenir la valeur de ce ralentissement. La

détermination aussi exacte que possible de la valeur de l'équation séculaire de la Lune par les observations conduira à ce résultat. L'importance d'une connaissance précise de la variation séculaire de la durée du jour sidéral rend donc plus grand encore l'intérêt qui s'attache aux comparaisons des Tables lunaires avec les anciennes observations d'éclipses, en vue d'arriver à bien fixer la vraie valeur de l'équation séculaire de la Lune.

NOTE

sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans la livraison du *Journal de Mathématiques* pour le mois d'avril 1861, j'ai introduit, pour la première fois je crois, dans la Géométrie pure, la considération des *séries* ou *systèmes* de courbes, assujetties à autant de conditions communes moins une, qu'il en faut pour déterminer une courbe de leur degré, et j'ai donné plusieurs formules générales concernant ces séries ou systèmes.

Ces formules sont exactes, et il n'y a même pas lieu d'invoquer à leur égard les conditions restrictives dont j'ai cru devoir les entourer plus tard, dans un moment de précipitation justifiée par diverses circonstances. (*Voir* une Note insérée en 1863 dans le *Journal de Mathématiques.*)

Cependant leur démonstration reposait sur un *lemme* qui a excité quelques doutes. En outre, plusieurs théorèmes, quand on les appliquait aux sections coniques, offraient d'apparentes anomalies dont je ne sus pas rendre compte; ce qui était de nature à entretenir l'incertitude.

Depuis cette époque, les anomalies dont il s'agit ont été expliquées par M. Chasles, dans l'un de ses beaux Mémoires sur les systèmes de courbes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1864). Elles tiennent à ce que, dans tout système de coniques, il y a un certain nombre de ces courbes qui se réduisent exceptionnellement à

deux droites ou à deux points (coniques infiniment petites et coniques infiniment aplaties). Ces coniques exceptionnelles sont, à plusieurs égards, étrangères à la question, comme on a coutume de dire en analyse, et pourtant il faut les compter, si l'on veut retrouver le nombre théorique donné par les formules générales qui les comprennent toutes indistinctement.

Cette difficulté levée, il ne restait plus qu'à asseoir les formules dont il s'agit sur une base plus assurée. Car d'ailleurs, dans les courbes des degrés supérieurs au second, les cas d'apparente exception ne se présentent pas [*] en général comme dans les coniques. Tel est l'objet de la démonstration suivante, qui ne saurait plus laisser subsister aucune indécision.

Soient : m le degré commun des courbes de la série ou du système; μ, ν les deux quantités que M. Chasles a nommées les *caractéristiques* du système, et qui expriment, l'une le nombre des courbes qui passent par un point quelconque du plan, l'autre le nombre des courbes qui touchent une droite quelconque.

J'ai donné dans l'article précité de 1861, sous des notations différentes, la relation générale

$$\nu = 2(m-1)\mu.$$

Voici une démonstration nouvelle et directe de ce théorème important, indépendante du lemme contesté dont je le faisais dépendre alors.

Soit L une droite quelconque. Par un point quelconque a de cette droite, dont l'abscisse comptée d'une origine fixe sera représentée par x, il passe μ courbes du système, par hypothèse et définition. Et, comme chacune de ces μ courbes rencontre L en $m-1$ autres points b, dont nous appellerons les abscisses y, il s'ensuit qu'à un point a il correspond, sur L, $(m-1)\mu$ points b, et réciproquement.

On a donc, entre x et y, une relation telle que

$$x^{m(\mu-1)}\left(Ay^{(m-1)\mu}+By^{(m-1)\mu-1}+\ldots\right)+x^{m(\mu-1)-1}\left(A_1 y^{(m-1)\mu}+\ldots\right)+\ldots=0.$$

---

[*] *Voir*, p. 415-416, la preuve de cette assertion.

Toutes les fois que $x = y$, une courbe du système touche L. Donc les abscisses des points de tangence sont les racines de l'équation

$$\mathrm{A}x^{2(m-1)\mu} + (\mathrm{B} + \mathrm{A}_1)\, x^{2(m-1)\mu-1} + \ldots = 0,$$

et par conséquent ces points sont au nombre de $2(m-1)\mu$, à moins que le coefficient A ne soit nul; ce qui ne peut avoir lieu généralement. Car l'équation entre x et y peut être mise sous la forme

$$x^{(m-1)\mu}\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{y} + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

et comme si l'on suppose le point b à l'infini il doit y avoir, dans ce cas aussi bien que dans tous les autres, $(m-1)\mu$ points a correspondant à b, le terme $\mathrm{A}x^{(m-1)\mu}$ existe nécessairement dans cette équation.

On a donc la relation

$$\nu = 2(m-1)\mu,$$

qu'il s'agissait de démontrer.

De là découlent, dans le Mémoire précité, diverses formules, exactes aussi par conséquent, et notamment la suivante, qui fait connaître le nombre des courbes du système qui touchent une courbe donnée du degré r, savoir

$$\mathrm{N} = \mu r(r + 2m - 3) \; [*].$$

On en conclut surtout cette autre conséquence plus importante :

Tout système de courbes peut être indistinctement *caractérisé de deux manières différentes. Quelles que soient les conditions communes aux courbes qui le composent, il suffit toujours de deux quantités indépendantes* (*indices ou caractéristiques*) *pour le définir complétement.*

---

[*] Cette formule peut aussi s'écrire

$$\mathrm{N} = r[(r-1)\mu + 2(m-1)\mu] = r[(r-1)\mu + \nu];$$

c'est sous cette dernière forme que M. Chasles l'a donnée dans son premier Mémoire.

Ces données sont, soit les deux caractéristiques indépendantes μ, ν, comme l'a fait M. Chasles dans ses derniers Mémoires, soit un seul indice μ (ou ν) conjointement avec le degré m des courbes, ainsi que je le proposais en 1861.

Ces deux définitions sont aussi générales l'une que l'autre; elles ont leurs avantages propres. Néanmoins celle qui fait usage des deux caractéristiques μ, ν, sans l'intervention du degré des courbes, offre, sinon plus de généralité, du moins plus de symétrie et de simplicité dans la notation, et probablement plus de fécondité. On sait tout le parti que M. Chasles a su en tirer, dans la théorie des coniques, sur le plan et dans l'espace.

Je terminerai en disant que la relation fondamentale

$$\nu = 2(m-1)\mu$$

s'applique aux systèmes de surfaces. Mais alors la lettre ν exprime le nombre de ces surfaces qui touchent une droite. Celles du second degré présentent d'ailleurs les mêmes anomalies apparentes que les coniques, à cause des couples de plans et de points qui s'y rencontrent et qui sont des *quasi-surfaces* au même titre que les coniques exceptionnelles sont des *quasi-coniques*, ainsi que M. Chasles les a appelées.

Saïgon, le 14 novembre 1865.

Nota. — Voici la cause de la différence, signalée page 413, ligne 11, qui existe entre les coniques et les courbes de tous les autres degrés.

Dans les coniques, le nombre des conditions qui déterminent un système, c'est-à-dire quatre, est précisément égal à la somme des conditions qui déterminent deux droites (ou deux points) auxquelles une conique peut accidentellement se réduire; tandis que, dans les degrés supérieurs au second, le nombre des conditions qui déterminent un système est *toujours* supérieur à la somme des nombres de conditions nécessaires pour déterminer les courbes d'ordre inférieur dans lesquelles une des courbes du système pourrait accidentellement se décomposer.

En d'autres termes, si $m = n + p + r + ..$, on a toujours

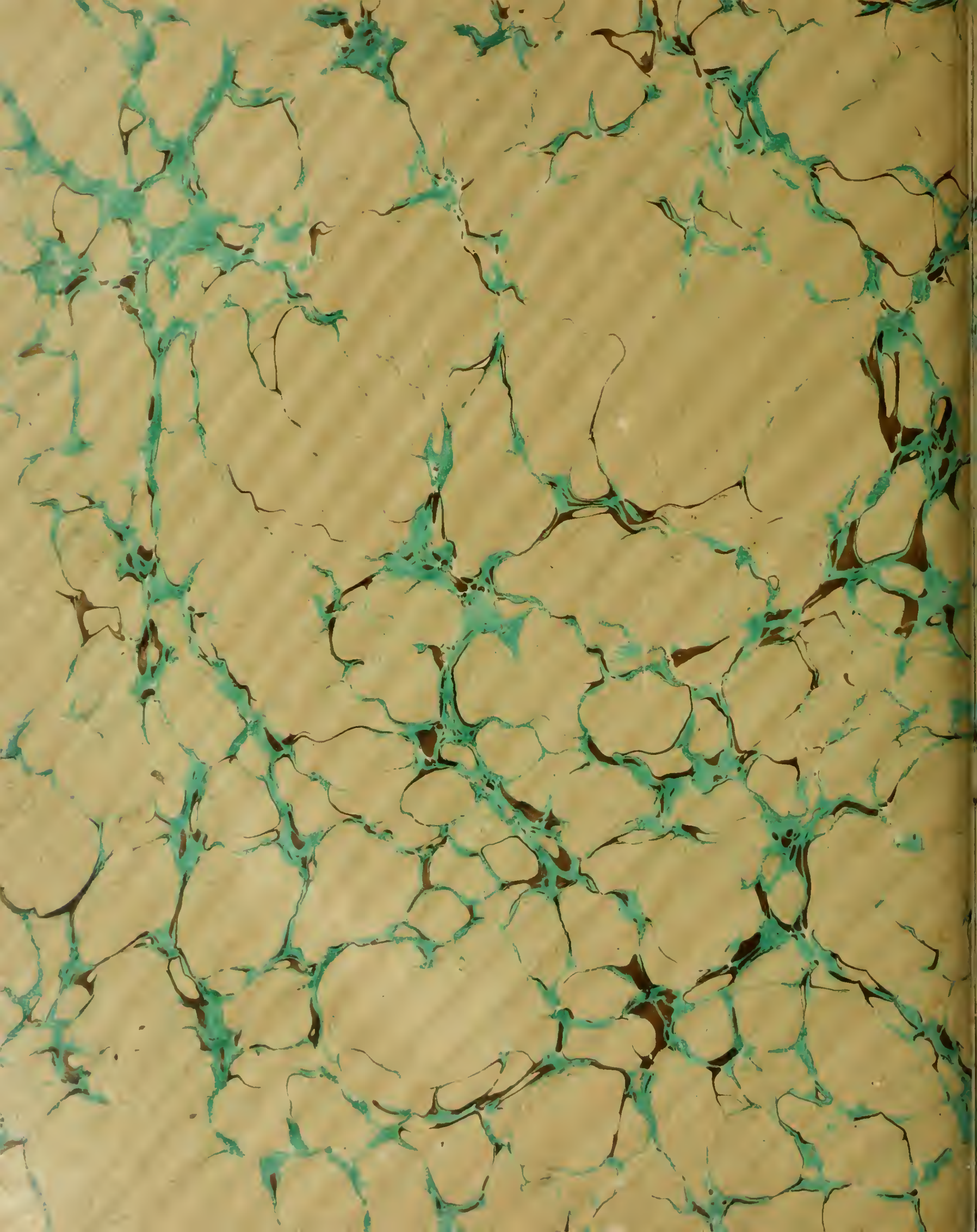
$$\frac{m(m+3)}{2} - 1 > \frac{n(n+3)}{2} + \frac{p(p+3)}{2} + \frac{r(r+3)}{2} + \ldots,$$

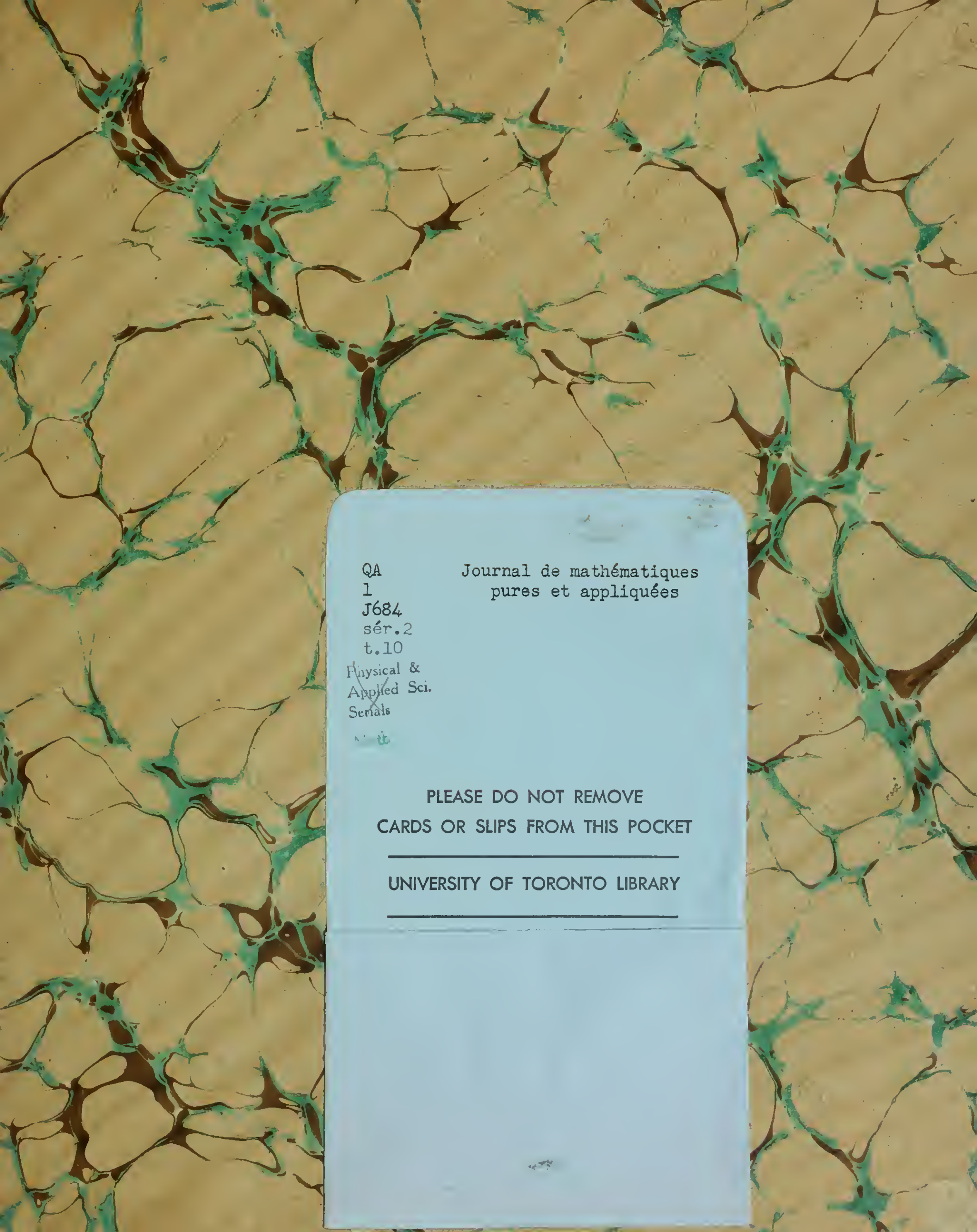
excepté pour le seul cas de $m = 2$.

Et cela est cause que, dans la théorie générale des courbes algébriques, les coniques forment, non pas seulement un cas individuel, mais encore, à beaucoup d'égards, un cas *particulier* de la question.

FIN DU TOME DIXIÈME (2ᵉ SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.





QA
1
J684
sér.2
t.10
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

